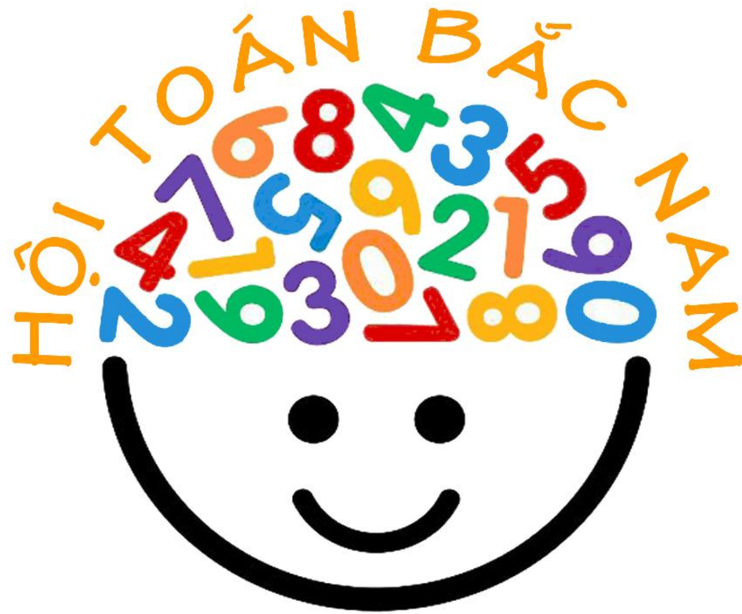


MỖI THÁNG MỘT CHỦ ĐỀ

Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng

Thanh Hoá, tháng 04, năm 2017

Lời nói đầu.

Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng là một phần kiến thức quan trọng thường xuyên là câu hỏi dùng để phân loại học sinh khá, giỏi trong đề thi. Đây là một chủ đề đã có rất nhiều bài viết, tuy nhiên tác giả vẫn quyết định viết chủ đề này như một món quà tặng cho các em học sinh lớp 10.

Các bài trong tài liệu được phân bài theo chương trình trong sách giáo khoa hiện hành rất thuận tiện cho bạn đọc và đặc biệt là các em học sinh đang học phần này tham khảo! Trong tài liệu tác giả có đưa ra các ví dụ minh họa ở các mức độ khác nhau kèm với đó là các bài tập đề nghị có hướng dẫn giải một số bài tập khó; đồng thời tác giả đưa ra 50 bài tập trắc nghiệm không đáp án để bạn đọc làm quen với cac bài tập trắc nghiệm!

Mặc dù trong quá trình biên soạn tác giả đã rất cố gắng để bài viết của mình được hoàn thiện nhất. Tuy nhiên chắc chắn rằng đâu đó sẽ có những câu, những từ làm bạn đọc thấy không hợp lý. Tác giả rất mong nhận được góp ý từ phía bạn đọc để bài viết được hoàn thiện hơn.

Mọi góp ý từ phía bạn đọc xin gửi về cho tác giả qua hòm thư điện tử: hoang.hoanglap@gmail.com, mạng xã hội Facebook: www.facebook.com.hoang.gd.7 hoặc ĐT: 0936.407.353.

Qúy thầy cô cần mua file word xin vui lòng liên hệ cho tác giả theo địa chỉ trên!

Thanh Hoá, ngày 15, tháng 04, năm 2017

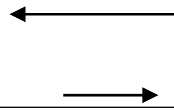
Nguyễn Bá Hoàng

Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng

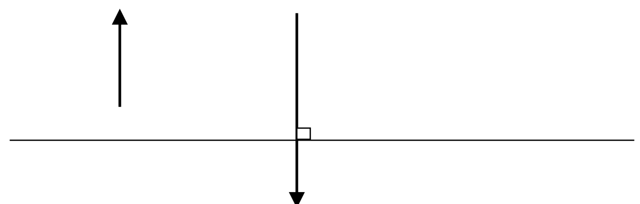
Bài 1. Viết phương trình đường thẳng

I. Nội dung kiến thức.

1. **Một số kiến thức về vectơ và toạ độ:**
    - Giá của một vecto là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.
    - Cho hai điểm *A*, *B* thì $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A),\ AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$
    - Nếu *M* là trung điểm của đoạn thẳng *AB* thì $x_M=\frac{x_A+x_B}{2};y_M=\frac{y_A+y_B}{2}.$
    - Nếu *G* là trọng tâm của tam giác *ABC* thì $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3};y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}.$
    - $\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v}),$ nếu $\vec{u}\perp\vec{v}$ thì $\vec{u}.\vec{v}=0;0^o<(\vec{u},\vec{v})<180^o.$
2. **Vectơ chỉ phương của đường thẳng:** Vectơ $\vec{u}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng *d* nếu nó có giá song song hoặc trùng với đường thẳng *d*.



3. **Vectơ pháp tuyến của đường thẳng**: Vectơ $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng *d* nếu nó có giá vuông góc với đường thẳng *d*.

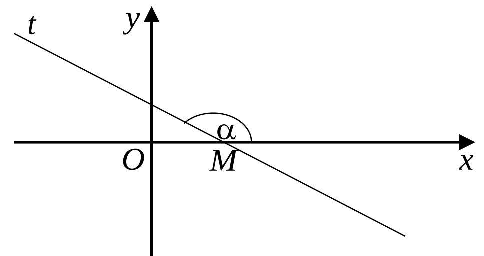


4. **Phương trình tham số của đường thẳng:** Đường thẳng *d* có vectơ **chỉ phương** $\vec{u}=(a;b)$ và đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ thì có phương trình tham số là: $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}$, ở đây *t* chính là tham số.
5. **Phương trình chính tắc của đoạn thẳng:** Đường thẳng *d* có vectơ **chỉ phương** $\vec{u}=(a;b)$ và đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ thì có phương trình tham số là: $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$, chú ý rằng phương trình chính tắc của đoạn thẳng chỉ được viết khi $ab\neq 0.$
6. **Phương trình tổng quát của đường thẳng:**
    - Đường thẳng *d* có vectơ **pháp tuyến** $\vec{n}=(a;b)$ và đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ thì có phương trình tổng quát là: $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0.$

- Cho đường thẳng $d: ax+by+c=0.$
  - Nếu đường thẳng d' **song song** với đường thẳng *d* thì phương trình đường thẳng d' có dạng $ax+by+c'=0.$
  - Nếu đường thẳng d'' **vuông góc** với đường thẳng *d* thì phương trình đường thẳng d'' có dạng $bx-ay+c''=0.$

7. **Phương trình đường thẳng theo đoạn chắn:** Đường thẳng *d* đi qua hai điểm $A(a;0), B(0;b)$ với $ab \neq 0$ có phương trình là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0.$

8. **Phương trình đường thẳng theo hệ số góc:**
   - Đường thẳng *d* có **hệ số góc** *k* và đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ thì có phương trình theo hệ số góc là: $y=k(x-x_0)+y_0$, chú ý rằng những đường thẳng song song với trục tung không viết được phương trình theo hệ số góc.
   - Góc giữa đường thẳng *d* và trục *Ox*: Đường thẳng *d* cắt trục *Ox* tại *M*, *Mt* là tia nằm phía trên trục *Ox* thì $\widehat{xMt}=\alpha$ là góc giữa đường thẳng *d* và trục *Ox* và ta cần lưu ý rằng $\tan\alpha=k.$



   - Đường thẳng *d* nếu có hệ số góc là *k* thì nó có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;k)$ và vectơ pháp tuyến là $\vec{v}=(k;-1).$
   - Cho đường thẳng *d* có hệ số góc là *k* và đường thẳng d' có hệ số góc là k' nếu:
     - $d \perp d'$ thì $k.k'=-1.$
     - $d \,//\, d'$ thì $k=k'.$

9. **Lưu ý:** Khi đề bài yêu cầu viết phương trình đường thẳng mà không nói gì ta viết phương trình tổng quát.

10. **Vị trí tương đối của hai đường thẳng:** Cho hai đường thẳng $\begin{cases} d: ax+by+c=0 \\ d': a'x+b'y+c'=0 \end{cases}.$

    Để xét vị trí tương đối của *d* và d' ta xét số nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases} \text{(I)}$$

   - Hệ (I) có một nghiệm thì *d* và d' cắt nhau.
   - Hệ (I) vô nghiệm thì *d* và d' song song với nhau.
   - Hệ (I) có vô số nghiệm thì *d* và d' trùng nhau.

    Nếu $a'b'c' \neq 0$ thì:

   - *d* và d' cắt nhau khi và chỉ khi $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}.$
   - *d* và d' song song với nhau khi và chỉ khi $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}.$
   - *d* và d' trùng nhau khi và chỉ khi $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$

II. Ví dụ minh hoạ.

Ví dụ 1. Cho hai điểm $M(-1;2), N(2;3)$.

a. Tìm vecto chỉ phương và vecto pháp tuyến của đường thẳng *MN*;

b. Viết phương trình chính tắc, tham số của đường thẳng *MN*.

Lời giải

a. Ta có vecto $\overrightarrow{MN}$ chính là vectơ chỉ phương của đường thẳng *MN* nên :

$$\overrightarrow{u_{MN}} = (2-(-1);3-2) \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{u_{MN}} = (3;1)}$$

Vectơ pháp tuyến của đường thẳng *MN* ta lấy được ngay là $\boxed{\overrightarrow{n_{MN}} = (-1;3)}$

b. Do đường thẳng *MN* đi qua $M(-1;2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{MN}} = (3;1)$ nên ta có :

Phương trình tham số của đường thẳng *MN* là : $\begin{cases} x = 3+(-1)t \\ y = 1+2t \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 3-t \\ y = 1+2t \end{cases}}$

Phương trình chính tắc của đường thẳng *MN* là : $\dfrac{x-(-1)}{3} = \dfrac{y-2}{1} \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{1}}$

Ví dụ 2. Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -3-t \end{cases}$.

a. Viết phương trình tổng quát của Δ;

b. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng *d* đi qua điểm $M(2;3)$ và song song với Δ;

c. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng *l* đi qua điểm $N(4;2)$ và vuông góc với Δ.

Lời giải

a. Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;-1)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;2)$.

Chọn tham số $t = 0$ ta có ngay điểm $A(1;-3)$ nằm trên Δ.

Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ là :

$$1.(x-1) + 2.\left[y-(-3)\right] = 0 \Leftrightarrow \boxed{x+2y-5=0}$$

b. Do đường thẳng *d* song song với Δ nên đường thẳng *d* có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d} = (2;-1)$.

Phương trình chính tắc của đường thẳng *d* là : $\boxed{\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{-1}}$

c. Đường thẳng *l* vuông góc với Δ nên có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_l} = (2;-1)$.

Phương trình tổng quát của đường thẳng *l* là :

$$2(x-4) - 1(y-2) = 0 \Leftrightarrow \boxed{2x-y-6=0}$$

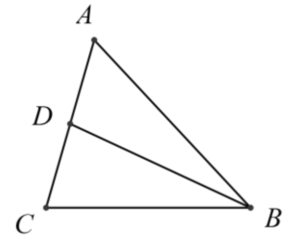
Ví dụ 3. Cho tam giác *ABC* với $A(-1;2), B(2;3), C(4;6)$.

a. Viết phương trình đường trung tuyến của tam giác kẻ từ *B*;

b. Tìm toạ độ trực tâm của tam giác *ABC*.

Lời giải

a. Gọi D là trung điểm của AC, ta có toạ độ của điểm D là : $D=\left(\frac{3}{2};4\right)$.



Ta có $\overrightarrow{BD}=\left(\frac{3}{2}-2;4-3\right)=\left(-\frac{1}{2};1\right)$ nên vectơ pháp tuyến của đường thẳng BD là : $\overrightarrow{n_{BD}}=(2;1)$.

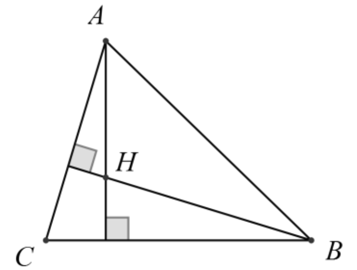
Phương trình đường thẳng BD là :

$$2(x-2)+1(y-3)=0 \Leftrightarrow \boxed{2x+y-7=0}$$

b. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC.

Ta có $\overrightarrow{BC}=(2;3)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng AH nên đường thẳng AH có phương trình là : $2(x+1)+3(y-2)=0 \Rightarrow 2x+3y-4=0$.

Ta có $\overrightarrow{AC}=(5;4)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng BH nên đường thẳng BH có phương trình là :



$$5(x-2)+4(y-3)=0 \Leftrightarrow 5x+4y-22=0.$$

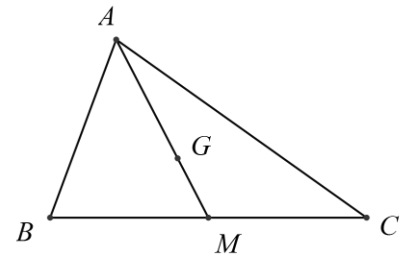
Suy ra toạ độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình sau :

$$\begin{cases}2x+3y-4=0\\5x+4y-22=0\end{cases} \Rightarrow \boxed{H=\left(\frac{50}{7};-\frac{24}{7}\right)}$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có đỉnh $C(-2;-4)$ và trọng tâm $G(0;4)$. Hãy viết phương trình đường thẳng AB biết rằng $M(2;2)$ là trung điểm của cạnh BC.

Lời giải

Vì $M(2;2)$ là trung điểm của cạnh BC nên ta có:



$$\begin{cases}\dfrac{x_B+(-2)}{2}=2\\ \dfrac{y_B+(-4)}{2}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_B=2.2+2=6\\y_B=2.2+4=8\end{cases} \Rightarrow B(6;8).$$

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GM}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}0-x_A=2(2-0)\\4-y_A=2(2-4)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_A=-4\\y_A=8\end{cases} \Rightarrow A(-4;8).$$

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(10;0)$ nên vectơ pháp tuyến của đường thẳng AB là: $\overrightarrow{n_{AB}}=(0;1)$.

Phương trình đường thẳng AB là: $0(x+4)+1(y-8) \Leftrightarrow \boxed{y-8=0}$

Ví dụ 5. Cho đường thẳng d có hệ số góc bằng -3 và $A(1;2)$ nằm trên d.

a. Lập phương trình tham số của đường thẳng d;

b. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng d.

Lời giải

a. Đường thẳng d có hệ số góc bằng -3 nên có vectơ chỉ phương là $(1;-3)$.

Đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2)$ và có vectơ chỉ phương là $(1;-3)$ nên có phương trình tham số là : $\boxed{\begin{cases}x=1+t\\y=2-3t\end{cases}}$

b. Đường thẳng d có hệ số góc bằng -3 nên có vectơ pháp tuyến là $(3;1)$.

Đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2)$ và có vectơ pháp tuyến là $(3;1)$ nên có phương trình tổng quát là :

$$3(x-1)+1(y-2)=0 \Leftrightarrow \boxed{3x+y-5=0}$$

Ví dụ 6. Hãy viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua $A(2;-5)$ và nó tạo với trục Ox một góc 60°.

Lời giải

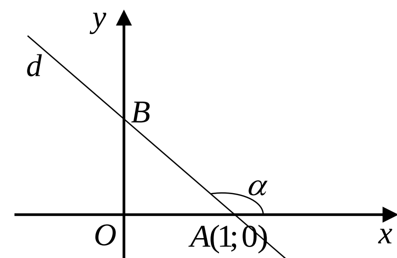
Hệ số góc của đường thẳng d là $k=\tan 60^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Phương trình đường thẳng d là : $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)-5 \Leftrightarrow \boxed{\sqrt{3}x-3y-15-2\sqrt{3}}$

Ví dụ 7. Cho đường thẳng d cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A, B. Biết rằng $A(1;0)$ và $BAO=45^{\circ}$. Hãy viết phương trình đường thẳng d.

Lời giải

Gọi α là góc giữa đường thẳng d và trục Ox.

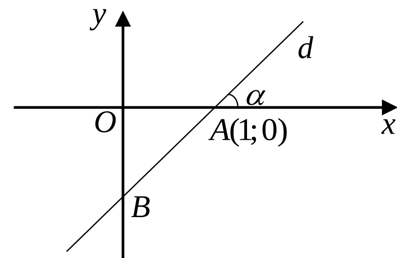


Trường hợp 1 :

$BAO+\alpha=180^{\circ} \Rightarrow \alpha=180^{\circ}-45^{\circ}=135^{\circ}$.

Suy ra hệ số góc của đường thẳng d là: $k=\tan 135^{\circ}=-1$.

Đường thẳng d có hệ số góc $k=-1$ và đi qua $A(1;0)$ nên có phương trình là: $y=-1(x-1)+0 \Leftrightarrow \boxed{x+y-1=0}$



Trường hợp 2 : $BAO=\alpha \Rightarrow \alpha=45^{\circ}$.

Suy ra hệ số góc của đường thẳng d là : $k=\tan 45^{\circ}=1$.

Đường thẳng d có hệ số góc $k=1$ và đi qua $A(1;2)$ nên có phương trình đường thẳng d là :

$$y=1(x-1)+0 \Leftrightarrow \boxed{x-y-1=0}$$

Ví dụ 8. Đường thẳng d đi qua $M(-1;-5)$ cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $OA=2OB$. Hãy viết phương trình đường thẳng d.

Lời giải

Cách 1 : Sử dụng phương trình đường thẳng dạng hệ số góc.

Gọi α là góc giữa đường thẳng d và trục Ox.

Do tam giác OAB vuông tại O nên ta có: $\tan BAO=\frac{OB}{OA}=\frac{1}{2}$.

Trường hợp 1 :

$BAO+\alpha=180^{\circ} \Rightarrow \tan\alpha=-\frac{1}{2}$. Đường thẳng d có hệ số góc bằng $-\frac{1}{2}$ và đi qua $M(-1;-5)$ nên có phương trình là : $y=-\frac{1}{2}(x+1)-5 \Leftrightarrow \boxed{x+2y+11=0}$

Trường hợp 2 :

$BAO=\alpha \Rightarrow \tan\alpha=\frac{1}{2}$. Đường thẳng d có hệ số góc bằng $\frac{1}{2}$ và đi qua $M(-1;-5)$ nên có phương trình là : $y=\frac{1}{2}(x+1)-5 \Leftrightarrow \boxed{x-2y-9=0}$

Cách 2 : Sử dụng phương trình đoạn chắn.

Giả sử $A(a;0), B(0;b); ab \neq 0$ phương trình đường thẳng AB là: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1 \Leftrightarrow bx+ay-ab=0\,(1)$.

Do $OA=2OB$ nên $|a|=2|b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2b \\ a=-2b \end{array}\right.$.

Trường hợp 1 :

Nếu $a=2b$ ta có $(1) \Leftrightarrow bx+2by-2b^2=0 \Leftrightarrow x+2y-2b=0$ (2).

Do $M(-1;-5)$ nằm trên d nên $-1+2.(-5)-2b=0 \Leftrightarrow 2b=-11$. Thay vào (2) ta được phương trình đường thẳng d là: $\boxed{x+2y+11=0}$

Trường hợp 2 :

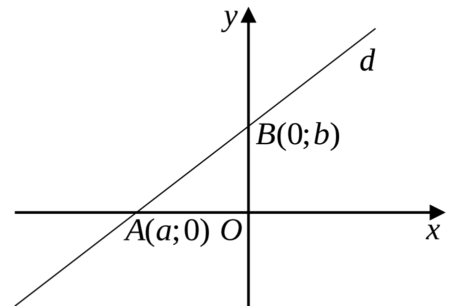
Nếu $a=-2b$ ta có $(1) \Leftrightarrow bx-2by+2b^2=0 \Leftrightarrow x-2y+2b=0$ (3).

Do $M(-1;-5)$ nằm trên đường thẳng d nên $-1-2.(-5)+2b=0 \Leftrightarrow 2b=-9$. Thay vào (3) ta được phương trình đường thẳng d là: $\boxed{x-2y-9=0}$

Ví dụ 9. Hãy lập phương trình đường thẳng qua $M(2;1)$ và cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 4.

Lời giải

Giả sử d là đường thẳng cần lập phương trình. Gọi $A(a;0), B(0;b)$ lần lượt là giao điểm của đường thẳng d với trục Ox, Oy.



Ta có phương trình đường thẳng d là: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}-1=0$.

Do điểm $M(2;1)$ nằm trên đường thẳng d nên:

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}-1=0 \Leftrightarrow a+2b-ab=0 \text{ (1)}.$$

Ta có: $S_{\Delta ABC}=4 \Leftrightarrow OA.OB=8 \Leftrightarrow |a|.|b|=8 \Leftrightarrow |ab|=8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ab=8 \\ ab=-8 \end{array}\right.$.

Trường hợp 1 : Nếu $ab=8$ thay vào (1) ta có: $\begin{cases} a=\dfrac{8}{b} \\ \dfrac{8}{b}+2b-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{8}{b} \\ (b-2)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=\dfrac{8}{b}=4 \end{cases}$.

Suy ra phương trình đường thẳng d là: $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}-1=0 \Leftrightarrow \boxed{x+2y-4=0}$

Trường hợp 2 : Nếu $ab=-8$ thay vào (1) ta có:

$$\begin{cases} a=-\dfrac{8}{b} \\ -\dfrac{8}{b}+2b+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{8}{b} \\ b^2+4b-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2\pm\sqrt{2} \\ a=-\dfrac{8}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=8+4\sqrt{2} \\ b=-2+\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a=8-4\sqrt{2} \\ b=-2-\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right..$$

Do đó phương trình đường thẳng d là:

$$\boxed{\left(1-\sqrt{2}\right)x+\left(2+2\sqrt{2}\right)y-4=0 \vee \left(1+\sqrt{2}\right)x+\left(2-2\sqrt{2}\right)y+4=0}$$

Ví dụ 10. Cho hai điểm $M(3;1)$ và $I(2;-2)$. Viết phương trình đường thẳng *d* đi qua *M* và cắt trục *Ox, Oy* lần lượt tại *A* và *B* sao cho tam giác *IAB* cân tại *I*.

Lời giải

Giả sử đường thẳng *d* cắt trục *Ox, Oy* lần lượt tại $A(a;0), B(0;b), ab \neq 0.$

Phương trình đường thẳng *d* có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$ Do *d* đi qua $M(3;1)$ nên $\frac{3}{a}+\frac{1}{b}=1(1).$

Gọi *N* là trung điểm của *AB* thì $N\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$. Vì tam giác *ABC* cân tại *I* nên $IN \perp AB.$

Do đó: $\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{a-4}{2};\frac{b+4}{2}\right).(-a;b)=0 \Leftrightarrow 4a-a^2+b^2+4b=0$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b-a+4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ a=b+4 \end{array}\right.$$

Trường hợp 1 : $a=-b$ thay vào (1) ta có: $\frac{3}{-b}+\frac{1}{b}=1 \Leftrightarrow b=-2 \Rightarrow a=2.$

Suy ra phương trình đường thẳng *d* là: $\frac{x}{2}+\frac{y}{-2}=1 \Leftrightarrow \boxed{x-y-2=0}$

Trường hợp 2 : $a=b+4$ thay vào (1) ta có:

$$\frac{3}{b+4}+\frac{1}{b}=1 \Leftrightarrow 3b+b+4=b^2+4b \Leftrightarrow b^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \Rightarrow a=6 \text{ (thoả mãn)} \\ b=-2 \Rightarrow a=2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Với $a=6, b=2$ ta có phương trình đường thẳng *d* là: $\frac{x}{6}+\frac{y}{2}=1 \Leftrightarrow \boxed{x+3y-6=0}$

Ví dụ 11. Cho đường thẳng $d: y=2x+1,$ viết phương trình đường thẳng d' đi qua điểm *B* là điểm đối xứng của điểm $A(0;-5)$ qua đường thẳng *d* và song song với đường thẳng $y=-3x+2.$

Lời giải

Đường thẳng *AB* vuông góc với đường thẳng *d* nên ta có: $k_{AB}.2=-1 \Leftrightarrow k_{AB}=-\frac{1}{2}.$

Phương trình đường thẳng *AB* là: $y=-\frac{1}{2}(x-0)-5 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x-5.$

Vì *A* và *B* đối xứng nhau qua đường thẳng *d* nên trung điểm *N* của chúng sẽ là giao điểm của hai đường thẳng *d* và *AB*.

Suy ra toạ độ của điểm *N* là nghiệm của hệ phương trình: $\left\{\begin{array}{l} y=2x+1 \\ y=-\frac{1}{2}x-5 \end{array}\right. \Rightarrow N\left(-\frac{12}{5};-\frac{19}{5}\right).$

Từ đó ta tính được $A\left(-\frac{24}{5};-\frac{13}{5}\right).$

Đường thẳng d' song song với đường thẳng $y=-3x+2$ nên $k_{d'}=-3.$

Phương trình đường thẳng d' là: $y=-3\left(x+\frac{24}{5}\right)-\frac{13}{5} \Leftrightarrow \boxed{y=-3x-17}$

III. Bài tập đề nghị.

1. Cho tam giác *ABC* trong mặt phẳng toạ độ *Oxy* với $A(2;3), B(-1;4), C(3;6)$.

a. Viết phương trình tổng quát đường trung tuyến kẻ từ *C*;

b. Tìm toạ độ của điểm *H* là chân đường cao kẻ từ *A*.

2. Hãy xác định đường thẳng đi qua điểm $A(1;2)$, cắt trục hoành tại *B*, cắt trục tung tại *C* sao cho $OB = 2OC$.

3. Tìm phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác *ABC* biết tam giác có hai đỉnh $A(-1;2), B(2;4)$ và trọng tâm $G(2;3)$.

4. Lập phương trình ba đường trung trực của một tam giác có trung điểm các cạnh lần lượt là $M(-1;0)$, $N(4;1), P(2;4)$.

5. Cho $M(1;2)$ hãy lập phương trình của đường thẳng qua *M* và chắn trên hai trục toạ độ hai đoạn có độ dài bằng nhau.

6. Cho tam giác *ABC* có toạ độ các đỉnh là $A(0;2), B(-1;3), C(4;1)$. Đường thẳng *d* cắt trục *Ox*, *Oy* lần lượt tai *M*, *N* sao cho $OM = 4ON$. Hãy viết phương trình đường thẳng *d* biết rằng nó đi qua trọng tâm *G* của tam giác *ABC*.

7. *A* và *B* lần lượt là giao điểm của đường thẳng *d* với trục *Ox* và *Oy*. Biết rằng $ABO = 60°$ và đường thẳng *d* đi qua $C\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$.

8. Cho đường thẳng *d*: $2x - y - 4 = 0$. Hãy lập phương trình đường thẳng *AO* biết rằng *O* là gốc toạ độ và *A* là hình chiếu của điểm $B(1;2)$ lên đường thẳng *d*.

9. Cho tam giác *ABC* có toạ độ đỉnh là $A(1;2), B(3;2), C(2;-3)$.

a. Viết phương trình đường trung trực của đoạn thẳng *AB*;

b. Viết phương trình đường trung tuyến đi qua đỉnh *C*;

c. Viết phương trình đường cao ứng với cạnh *BC*;

d. Viết phương trình đường trung bình của tam giác *ABC* cắt các cạnh *AB* và *AC*.

10. Cho hai điểm $M(0;-2)$ và $I(1;4)$. Viết phương trình đường thẳng *d* đi qua *M* và cắt trục *Ox*, *Oy* lần lượt tại *A* và *B* sao cho tam giác *IAB* cân tại *I*.

11. Hai cạnh *AB*, *AC* của tam giác *ABC* có phương trình lần lượt là $3x - 2y + 1 = 0$ và $x - y + 1 = 0$. Đường trung tuyến ứng với cạnh *AB* có phương trình là $2x - y - 1 = 0$. Viết phương trình của cạnh *BC*.

12. Một cạnh của tam giác có phương trình $x - 2y + 7 = 0$. Hai đường trung tuyến ứng với hai cạnh còn lại có phương trình $x + y - 5 = 0$ và $2x + y - 11 = 0$. Hãy viết phương trình hai cạnh còn lại của tam giác.

13. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây:

a. $2x - 5y + 3 = 0$ và $-3x + 7y - 8 = 0$;

b. $x - 3y + 5 = 0$ và $\begin{cases} x = 3 + 6t \\ y = \frac{1}{2} + 2t \end{cases}$;

c. $\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 1 - 2t' \\ y = 7 + 3t' \end{cases}$;

14. Tìm phương trình đường thẳng chứa các cạnh của tam giác *ABC* biết rằng tam giác có hai đỉnh $A(-1;2), B(2;4)$ và trọng tâm $G(2;3)$.

15. Cho tam giác *ABC*, biết phương trình đường thẳng $AB: x - 3y + 11 = 0$, đường cao $AH: 3x + 7y - 15 = 0$, đường cao $BH: 3x - 5y + 13 = 0$. Tìm phương trình đường thẳng chứa hai cạnh còn lại của tam giác.

16. Cho tam giác *ABC* có $A(-2;3)$ và hai đường trung tuyến qua điểm *B* và điểm *C* lầ lượt là $2x - y + 1 = 0, x + y - 4 = 0$. Hãy viết phương trình ba đường thẳng chứa ba cạnh của tam giác.

17. Lập phương trình đường thẳng *d* đi qua $P(6;4)$ và tạo với hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 2.

18. Lập phương trình đường thẳng *d* đi qua $Q(2;3)$ và cắt tia *Ox*, *Oy* tại hai điểm *M* (có hoành độ dương), *N* (có tung độ dương) sao cho $OM + ON$ nhỏ nhất.

19. Cho hai đường thẳng $d_1: 2x - y - 2 = 0, d_2: x + y + 3 = 0$ và điểm $M(3;0)$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua *M*, cắt d_1 và d_2 lần lượt tại *A* và *B* sao cho *M* là trung điểm của đoạn thẳng *AB*.

20. Cho điểm $M(3;1)$. Viết phương trình đường thẳng *d* đi qua *M* cắt các tia *Ox* và *Oy* lần lượt tại *A* (có hoành độ dương) và *B* (có tung độ dương) sao cho $OA + 3OB$ nhỏ nhất.

21. Cho hai đường thẳng $d_1: x - 2y + 2 = 0, d_2: 2x + 3y - 17 = 0$. Đường thẳng *d* đi qua giao điểm của d_1 và d_2 cắt hai tia *Ox* và *Oy* lần lượt tại *A* và *B*. Viết phương trình đường thẳng *d* sao cho $\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

22. Cho điểm $M(2;4)$. Viết phương trình đường thẳng qua *M* cắt trục *Ox* tại *A* (có hoành độ dương), cắt trục *Oy* tại *B* (có tung độ dương) sao cho:

a. $OA + OB$ đạt giá trị nhỏ nhất;

b. Diện tích tam giác *OAB* nhỏ nhất.

Bài 2. Khoảng cách và góc

I. Nội dung kiến thức.

1. **Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng:** Khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0)$ đến đường thẳng $d: ax+by+c=0$ được tính theo công thức $d(M,d)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
2. **Phương trình đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau:** Cho đường hai đường thẳng cắt nhau $d_1: a_1x+b_1y+c_1=0, d_2: a_2x+b_2y+c_2=0,$ khi đó phương trình hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2 là: $\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\dfrac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.
3. **Vị trí tương đối của hai điểm với một đường thẳng trên mặt phẳng:** Cho hai điểm $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ và đường thẳng $d: ax+by+c=0$. Khi đó:
   - Nếu $\left(ax_A+by_A+c\right)\left(ax_B+by_B+c\right)<0$ thì *A* và *B* nằm khác phía so với đường thẳng *d* trên mặt phẳng.
   - Nếu $\left(ax_A+by_A+c\right)\left(ax_B+by_B+c\right)>0$ thì *A* và *B* nằm cùng phía so với đường thẳng *d* trên mặt phẳng.
4. **Góc giữa hai đường thẳng:**
   - Cho đường hai đường thẳng $d_1: a_1x+b_1y+c_1=0, d_2: a_2x+b_2y+c_2=0,$ khi đó góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 được xác định qua công thức: $\cos(d_1,d_2)=\dfrac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.
   - d_1 và d_2 vuông góc với nhau khi và chỉ khi $a_1a_2+b_1b_2=0.$
   - Cho đường thẳng d_1 có hệ số góc k_1 và d_2 có hệ số góc k_2 thì ta có: $\tan(d_1,d_2)=\left|\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$.
   - $0^o<(d_1,d_2)<90^o.$
5. **Lưu ý:** Bạn đọc cần phân biệt rõ các khái niệm góc giữa hai vecto,góc giữa hai đường thẳng và các góc tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau.

II. Ví dụ minh hoạ.

Ví dụ 1. Cho đường thẳng $d: 2x-3y+1=0$ và điểm $A(-1;3)$.

a. Tính khoảng cách từ điểm *A* đến đường thẳng *d*.

b. Tìm phương trình đường thẳng d' đi qua *A* và cách điểm $B(2;5)$ khoảng cách bằng 3.

Lời giải

a. Khoảng cách từ điểm *A* đến đường thẳng *d* là :

$$d(A,d)=\frac{|2(-1)-3.3+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} \Leftrightarrow \boxed{d(A,d)=\frac{10\sqrt{13}}{13}}$$

b. Phương trình d' có dạng: $ax+by+c=0$. Do $A\in d'$ nên : $(-1)a+3b+c=0 \Leftrightarrow c=a-3b$ (1).

Hơn nữa $d(B,d')=3 \Leftrightarrow \dfrac{|2a+5b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3$ (2).

Thay (1) vào (2) ta có : $\dfrac{|3a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3 \Leftrightarrow 5b^2-12ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=\dfrac{12a}{5} \end{array}\right.$.

- Với $b=0$ thay vào (1) ta có $c=a \Rightarrow d': ax+a=0 \Leftrightarrow \boxed{d': x+1=0}$
- Với $b=\dfrac{12a}{5}$ ta chọn $a=5, b=12$ thay vào (1) ta được:

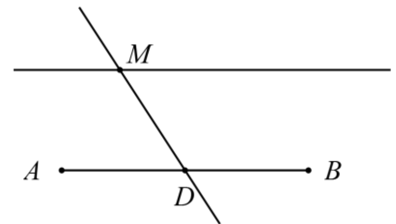
$$c=5-3.12=-31 \Rightarrow \boxed{d': 5x+12y-31=0}$$

Ví dụ 2. Hãy viết phương trình đường thẳng di qua điểm $M(2;5)$ và cách đều $A(-1;2)$ và $B(5;4)$.

Lời giải

Cách 1 :

Trường hợp 1 : đường thẳng cần tìm đi qua *M* và song song với *AB*.



Khi đó $\overrightarrow{AB}=(6;2)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng *d* suy ra vectơ pháp tuyến của đường thẳng *d* là : $(1;-3)$.

Phương trình đường thẳng cần tìm là :

$$1(x-2)-3(x-5)=0 \Leftrightarrow \boxed{x-3y+13=0}$$

Trường hợp 2 : Đường thẳng cần tìm đi qua *M* và đi qua trung điểm *D* của đoạn thẳng *AB*.

Ta có $D(2;3)$ nên $\overrightarrow{MD}=(0;-2)$ suy ra vectơ pháp tuyến của đường thẳng *d* là: $(1;0)$.

Phương trình đường thẳng cần tìm là : $1(x-2)+0(y-5)=0 \Leftrightarrow \boxed{x-2=0}$

Cách 2 :

Gọi phương trình đường thẳng *d* cần tìm là $ax+by+c=0$ (1).

Do $M(2;5)\in d$ nên ta có : $2a+5b+c=0 \Leftrightarrow c=-2a-5b$. Thay $c=-2a-5b$ vào (1) ta có phương trình đường thẳng *d* trở thành: $ax+by-2a-5b=0$ (2).

Vì *d* cách đều hai điểm *A* và *B* nên :

$$\frac{|(-1)a+2b-2a-5b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|5a+4b-2a-5b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow |3a+3b|=|3a-b|$$

$$\Leftrightarrow 9a^2+18ab+9b^2=9a^2-6ab+b^2 \Leftrightarrow 8b^2+24ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=-3a \end{array}\right..$$

Trường hợp 1 : Với $b=0$ thay vào (2) ta được phương trình đường thẳng d là :

$$ax+0y-2a-5.0=0 \Leftrightarrow ax-2a=0 \Leftrightarrow \boxed{x-2=0}$$

Trường hợp 2 : Với $b=-3a$ ta chọn $a=1, b=-3$ thay vào (2) ta được phương trình dường thẳng d là : $1x-3y-2-5.(-3)=0 \Leftrightarrow \boxed{x-3y+13=0}$

Ví dụ 3. Cho các đường thẳng $d_1: 2x-y+5=0, d_2: 3x+6y-1=0.$ Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2.

a. Tìm số đo góc giữa d_1 và d_2;

b. Tìm đường thẳng d đi qua điểm $M(2;-1)$ cắt d_1, d_2 lần lượt tại B, C sao cho tam giác ABC cân đỉnh A.

Lời giải

a. Ta có : $\cos(d_1,d_2)=\dfrac{|2.3-1.6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}.\sqrt{3^2+6^2}}=0 \Rightarrow \boxed{(d_1,d_2)=90^\circ}$

b. Giả sử đường thẳng d có phương trình tổng quát là $ax+by+c=0$ (1).

Do $M(2;-1)\in d$ nên $2a-b+c=0 \Leftrightarrow c=b-2a$ (2).

Do tam giác ABC cân tại A nên $(d,d_1)=(d,d_2) \Leftrightarrow \dfrac{|2a-b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}.\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|3a+6b|}{\sqrt{3^2+6^2}.\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{|2a-b|}{\sqrt{5}}=\frac{|3a+6b|}{3\sqrt{5}} \Leftrightarrow |2a-b|=|a+2b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a-b=a+2b \\ 2a-b=-a-2b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3b \\ 3a=-b \end{array}\right.$$

Trường hợp 1 : Nếu $a=3b$ chọn $b=1 \Rightarrow a=3$ thay vào (2) ta có: $a=b-2a=1-2.3=-5.$

Thay vào (1) ta được phương trình đường thẳng d là : $\boxed{3x+y-5=0}$

Trường hợp 2 : Nếu $3a=-b$ chọn $a=1 \Rightarrow b=-3$ thay vào (2) ta có : $a=b-2a=-3-2.1=-5.$

Thay vào (1) ta được phương trình đường thẳng d là: $\boxed{x-3y-5=0}$

Ví dụ 4. Cho đường thẳng $d: x+2y+4=0$ và điểm $M(1;2)$.

a. Tìm số đo góc giữa đường thẳng d và đường thẳng $d': x-3y+6=0.$

b. Tìm phương trình đường thẳng qua M hợp với d một góc bằng 60°.

Lời giải

a. Ta có : $\cos(d_1,d_2)=\dfrac{|1.1+2.(-3)|}{\sqrt{1^2+2^2}.\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{(d_1,d_2)=45^\circ}$

b. Đường thẳng d_2 qua $M(1;2)$ hợp với d một góc 60° có phương trình tổng quát là $ax+by+c=0.$

Vì $M(1;2)\in d_2 \Leftrightarrow a+2b+c=0 \Leftrightarrow c=-a-2b$ (1)

Lại có : $(d,d_2)=60^\circ \Leftrightarrow \dfrac{|1.a+2.b|}{\sqrt{1^2+2^2}.\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a^2-16ab-11b^2=0 \Leftrightarrow a=\left(8\pm 5\sqrt{3}\right)b.$

Trường hợp 1 : Với $a=\left(8+5\sqrt{3}\right)b$ chọn $b=1 \Rightarrow a=8+5\sqrt{3}; (1) \Rightarrow c=-10-5\sqrt{3}.$

Suy ra $\boxed{d: \left(8+5\sqrt{3}\right)x+y-10-5\sqrt{3}=0}$

Trường hợp 2 : Với $a=\left(8-5\sqrt{3}\right)b$ chọn $b=1 \Rightarrow a=8-5\sqrt{3}; (1) \Rightarrow c=-10+5\sqrt{3}.$

Suy ra $\boxed{d:\left(8-5\sqrt{3}\right)x+y-10+5\sqrt{3}=0}$

Ví dụ 5. Cho tam giác *ABC* với $A(3;3), B(-1;2), C(4;1)$.

a. Tìm số đo góc BAC.

b. Tìm số đo góc tạo thành từ hai đường thẳng *AB* và *AC*.

Lời giải

a. Ta có : $\overrightarrow{AB}=(-4;-1), \overrightarrow{AC}=(1;-2)$.

Mà $\cos BAC=\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \cos BAC=\dfrac{-4.1+(-1).(-2)}{\sqrt{(-4)^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{-2}{\sqrt{85}} \Rightarrow \boxed{BAC=102^o32'}$

b. Ta có : $\cos(AB,AC)=\left|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right| \Leftrightarrow \cos(AB,AC)=\dfrac{\left|-4.1+(-1).(-2)\right|}{\sqrt{(-4)^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{2\sqrt{85}}{85}$

$$\Rightarrow \boxed{(AB,AC)=77^o28'}$$

Ví dụ 6. Cho các cạnh của tam giác *ABC* có phương trình:

$$AB: x-y+4=0, BC: 3x+5y+4=0, CA: 7x+y-12=0.$$

a. Viết phương trình đường phân giác trong góc *A*;

b. Chứng minh rằng điểm *O* nằm trong tam giác *ABC*.

Lời giải

Toạ độ điểm *A* là nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases} x-y+4=0 \\ 7x+y-12=0 \end{cases} \Rightarrow A(1;5)$.

Toạ độ điểm *B* là nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases} x-y+4=0 \\ 3x+5y+4=0 \end{cases} \Rightarrow B(-3;1)$.

Toạ độ điểm *A* là nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases} 3x+5y+4=0 \\ 7x+y-12=0 \end{cases} \Rightarrow C(2;-2)$.

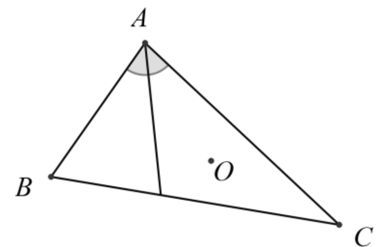
a. Phương trình đường phân giác trong và ngoài của góc *A* là :

$$\frac{x-y+4}{\sqrt{1+(-1)^2}}=\pm\frac{7x+y-12}{\sqrt{7^2+1^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5(x-y+4)=7x+y-12 \\ 5(x-y+4)=-(7x+y-12) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3y-16=0\ (1) \\ 3x-y+2=0\ (2) \end{array}\right.$$

Thay toạ độ điểm *B* và *C* vào vế trái của phương trình (1) ta được:

$$-3+3-16=-16 \text{ và } 2-6-16=-20$$

Suy ra *B* và *C* ở cùng phía đối với đường thẳng có phương trình (1), do vậy phương trình đường phân giác trong góc *A* là : $\boxed{3x-y+2=0}$



b. Thay lần lượt toạ độ của *O* vào vế trái phương trình của các đường thẳng *AB*, *BC*, *CA* ta được: $4, 4, -12$.

Thay lần lượt toạ độ của *C*, *A*, *B* vào vế trái của các đường thẳng *AB*, *BC*, *CA* ta được: $8, 32, -32$.

Như vậy *O* và *A* nằm cùng phía so với đường thẳng *BC*, *O* và *B* nằm cùng phía so với đường thẳng *AC*, *O* và *C* nằm cùng phía so với đường thẳng *AB* nên *O* nằm trong tam giác *ABC*.

Ví dụ 7. Hãy viết phương trình tham số của đường thẳng d' đi qua điểm $A(-1;2)$ và tạo với đường thẳng $d:\begin{cases} x=2+3t \\ y=-2t \end{cases}$ góc 60^o.

Lời giải

Gọi $\vec{u}=(a;b)$ là vecto chỉ phương của đường thẳng d'.

Do đường thẳng d' tạo với đường thẳng d góc 60^o nên :

$$\cos 60^o=\frac{|3a-2b|}{\sqrt{3^2+2^2}.\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{|3a-2b|}{\sqrt{13}.\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow 13(a^2+b^2)=4(3a-2b)^2$$

$$23a^2-48ab+3b^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{24-\sqrt{507}}{23}b\\ a=\dfrac{24+\sqrt{507}}{23}b\end{array}\right.$$

Trường hợp 1 : $a=\dfrac{24-\sqrt{507}}{23}b$ chọn $b=1\Rightarrow a=\dfrac{24-\sqrt{507}}{23}$, ta được phương trình của đường thẳng d' là: $\boxed{\begin{cases}x=-1+\dfrac{24-\sqrt{507}}{23}t\\ y=2+t\end{cases}}$

Trường hợp 2 : $a=\dfrac{24+\sqrt{507}}{23}b$ chọn $b=1\Rightarrow a=\dfrac{24+\sqrt{507}}{23}$, ta được phương trình của đường thẳng d' là: $\boxed{\begin{cases}x=-1+\dfrac{24+\sqrt{507}}{23}t\\ y=2+t\end{cases}}$

Ví dụ 8. Cho $M(5;1)$, viết phương trình đường thẳng d qua M và tạo với đường thẳng $d': y=-2x+4$ góc 45^o.

Lời giải

Gọi k và k' theo thứ tự là hệ số góc của hai đường thẳng d và d' thì $k'=-2$.

Ta có : $\tan(k,k')=\tan 45^o\Leftrightarrow\left|\dfrac{k-k'}{1-k.k'}\right|=1\Leftrightarrow\left|\dfrac{-2-k}{1-2k}\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=3\\ k=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$.

Trường hợp 1 : Với $k=3$ ta có phương trình đường thẳng d là: $y=3(x-5)+1\Leftrightarrow\boxed{3x-y-14=0}$

Trường hợp 2 : Với $k=-\dfrac{1}{3}$ ta có phương trình đường thẳng d là:

$y=-\dfrac{1}{3}(x-5)+1\Leftrightarrow\boxed{x+3y-8=0}$

III. Bài tập đề nghị.

23. Cho các điểm $P(2;5), Q(5;1)$. Hãy lập phương trình đường thẳng *d* đi qua *P* sao cho khoảng cách từ *Q* đến *d* bằng 3.

24. *(Khối A năm 2006)* Cho các đường thẳng $d_1: x+y+3=0, d_2: x-y-4=0,\ d_3: x-2y=0.$ Tìm toạ độ điểm *M* nằm trên đường thẳng d_3 sao cho khoảng cách từ *M* đến d_1 bằng hai lần khoảng cách từ *M* đến d_2.

25. *(ĐH DL Công Nghệ năm 1999)* Tìm phương trình đường thẳng qua $M(-2;3)$ và cách đều hai điểm $A(-1;0), B(2;1).$

26. Cho hai đường thẳng $d_1: 2x-y+1=0, d_2: x+2y-7=0.$ Lập phương trình đường thẳng *d* đi qua gốc toạ độ sao cho *d* tạo với d_1, d_2 một tam giác cân có đỉnh là giao điểm của d_1 và d_2.

27. Viết phương trình đường thẳng đi qua $A(1;1)$ và cách $B(3;6)$ một khoảng bằng 2.

28. Cho đường thẳng *d* có phương trình $8x-6y-5=0.$ Viết phương trình đường thẳng d' song song với *d* và cách *d* một khoảng bằng 5.

29. *(ĐH Tây Nguyên khối D năm 2000)* Hãy lập phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm $I(-2;3)$ và cách đều hai điểm $A(5;-1)$ và $B(3;4).$

30. Cho điểm $P(3;0)$ và hai đường thẳng $d_1: 2x-y-2=0, d_2: x+y+3=0.$ Gọi *d* là đường thẳng qua *P* và cắt d_1, d_2 lần lượt tại *A*, *B* sao cho $PA=PB.$ Viết phương trình đường thẳng *d*.

31. *(Dự bị khối A năm 2004)* Cho điểm $A(0;2)$ và đường thẳng $d: x-2y+2=0.$ Tìm toạ độ các điểm *B*, *C* trên đường thẳng *d* sao cho tam giác *ABC* vuông tại *B* và $AB=2BC.$

32. *(Khối B năm 2004)* Cho $A(1;1), B(4;-3).$ Tìm điểm *C* thuộc đường thẳng $d: x-2y-1=0$ sao cho khoảng cách từ *C* đến đường thẳng *AB* bằng 6.

33. Cho các đường thẳng $d_1: 2x-y-2=0, d_2: 2x+4y-7=0.$

a. Viết phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi d_1 và d_2.

b. Viết phương trình đường thẳng qua $P(3;1)$ và cùng d_1, d_2 tạo thành một tam giác cân tại đỉnh là giao điểm của d_1 và d_2.

34. Cho đường thẳng $d: 2x+3y-5=0$ và hai điểm $M(3;m), N(6;2)$ với *m* là tham số. Tìm giá trị của *M* để hai điểm *M* và *N* nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ là *d*.

35. Cho đường thẳng $d: 3x-4y+6=0$ và các điểm $A(-1;2), B(2;3), C(-3;-4).$ Hãy cho biết đường thẳng *d* cắt những cạnh nào của tam giác *ABC*.

36. Hãy tính diện tích tam giác *OBC* biết rằng $B(4;-3), C(12;5)$ và *O* là gốc toạ độ.

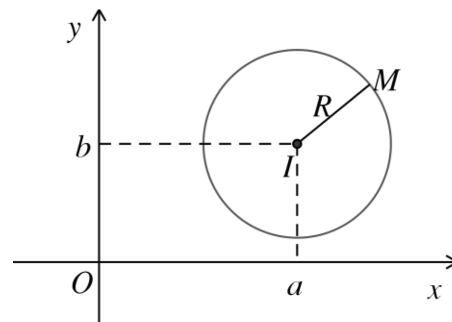
37. Cho tam giác *ABC* có đỉnh $A\left(\frac{4}{5};\frac{7}{5}\right).$ Hai đường phân giác trong của góc *B* và góc *C* lần lượt có phương trình $x-2y-1=0$ và $x+3y-1=0.$ Hãy viết phương trình cạnh *BC* của tam giác.

38. Lập phương trình đường phân giác góc nhọn giữa hai đường thẳng $d_1: x+3y-6=0$ và $d_2: 3x+y+2=0.$

Bài 3. Đường tròn

I. Kiến thức cần nhớ.

1. **Phương trình đường tròn.**
   - Phương trình đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính R là: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
   - Phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình đường tròn khi $a^2+b^2-c>0$ và khi đó nó có tâm $I(a;b)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.



2. **Vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn.**
   - Cho đường tròn $(C):(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ và đường thẳng $d: Ax+By+C=0$. Khi đó số giao điểm của đường thẳng *d* và đường tròn (*C*) là số nghiệm của hệ phương trình:
   $$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\\ Ax+By+C=0\end{cases} (*).$$
     - Nếu hệ (*) vô nghiệm thì đường thẳng *d* và đường tròn (*C*) không có điểm chung.
     - Nếu hệ (*) có một nghiệm thì đường thẳng *d* và đường tròn (*C*) tiếp xúc với nhau.
     - Nếu hệ (*) có hai nghiệm thì đường thẳng *d* và đường tròn (*C*) cắt nhau.
   - Cho đường tròn (*C*) tâm $I(a;b)$, bán kính *R* và đường thẳng $d: Ax+By+C=0$. Ta cũng có thể xét vị trí tương đối giữa đường thẳng *d* và đường tròn (*C*) như sau:
     - Nếu $d(I,d)>R$ thì đường thẳng *d* và đường tròn (*C*) không có điểm chung.
     - Nếu $d(I,d)=R$ thì đường thẳng *d* và đường tròn (C) tiếp xúc với nhau.
     - Nếu $d(I,d)<R$ thì đường thẳng *d* và đường tròn (*C*) cắt nhau.
3. **Vị trí tương đối giữa hai đường tròn.**
   Cho hai đương tròn: $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ và $(C'): x^2+y^2-2a'x-2b'y+c'=0$. Ta xét hệ phưng trình sau: $\begin{cases}x^2+y^2-2ax-2by+c=0\\ x^2+y^2-2a'x-2b'y+c'=0\end{cases}$ (*).
   - Nếu hệ (*) vô nghiệm thì (C) và (C') không có điểm chung.
   - Nếu hệ (*) có một nghiệm thì (C) và (C') tiếp xúc với nhau.
   - Nếu hệ (*) có hai nghiệm thì (C) và (C') cắt nhau.
4. **Phương trình tiếp tuyến của đường tròn.**
   Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ của đường tròn tâm $I(a;b)$ có phương trình:
   $$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0.$$

II. Ví dụ minh hoạ.

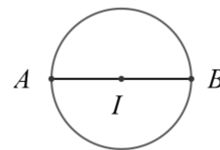
Ví dụ 1. Viết phương trình đương tròn đường kính AB với $A(7;-3), B(1;7)$.

Lời giải

Cách 1 :

Đường tròn đường kính AB nhận trung điểm I của AB là tâm và có bán kính $R=\frac{1}{2}AB$.

Ta có: $I=(4;2), R=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{(1-7)^2+(7+3)^2}=\frac{1}{2}.2\sqrt{34}=\sqrt{34}$.



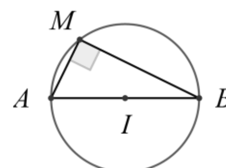
Suy ra phương trình đường tròn là: $\boxed{(x-4)^2+(y-2)^2=34}$

Cách 2 :

Điểm $M(x;y)$ thuộc đường tròn đường kính AB khi và chỉ khi $AM\perp BM$.

Suy ra: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0\Leftrightarrow(x-7)(x-1)+(y+3)(y-7)=0$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-8x-4y-14=0.$$



Như vậy phương trình đường tròn là: $\boxed{x^2+y^2-8x-4y-14=0}$

Ví dụ 2. Viết phương trình của đường tròn trong các trường hợp sau:

a. Có tâm là điểm $I(2;3)$ và đi qua $M(3;6)$;

b. Đi qua ba điểm $A(-1;-2), B(1;3), C(2;1)$;

c. Có tâm là điểm $I(3;-2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $6x-8y-17=0$.

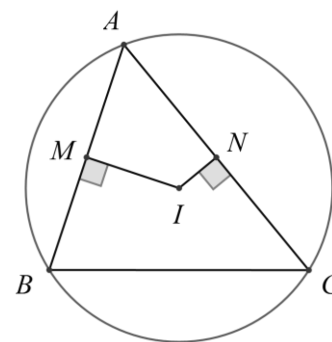
Lời giải

a. Bán kính của đường tròn là : $R=IM=\sqrt{(3-2)^2+(6-3)^2}=\sqrt{10}$.

Suy ra đường tròn tâm $I(2;3)$ đi qua $M(3;6)$ có phương trình là : $\boxed{(x-2)^2+(y-3)^2=10}$

b. Cách 1:

Tâm của đường tròn qua ba điểm là giao điểm của các đường trung trực của ba đoạn thẳng nối các điểm đó.



Trung điểm của AB là $M\left(0;\frac{1}{2}\right)$ nên phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB là :

$$2(x-0)+5\left(y-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow 4x+10y-5=0.$$

Trung điểm của AC là $N\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ nên phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AC là :

$$3\left(x-\frac{1}{2}\right)+3\left(y+\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow x+y=0.$$

Tâm I của đường tròn là nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases}4x+10y-5=0\\ x+y=0\end{cases}\Rightarrow I\left(-\frac{5}{6};\frac{5}{6}\right)$.

Bán kính của đường tròn là : $R=IB=\sqrt{\left(1+\frac{5}{6}\right)^2+\left(3-\frac{5}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{290}}{6}$.

Phương trình đường tròn cần tìm là : $\boxed{\left(x+\frac{5}{6}\right)^2+\left(y-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{145}{18}}$

Cách 2:

Gọi phương trình đường tròn đi qua ba điểm A,B,C là: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0.$

Ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases}(-1)^2+(-2)^2-2.(-1)a-2.(-2)b+c=0\\1^2+3^2-2.1a-2.3b+c=0\\2^2+1^2-2.2a-2.1b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+4b+c=-5\\-2a-6b+c=-10\\-4a-2b+c=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{5}{6}\\b=\dfrac{5}{6}\\c=-\dfrac{20}{3}\end{cases}.$$

Suy ra phương trình đường tròn cần tìm là : $\boxed{x^2+y^2+\frac{5}{3}x-\frac{5}{3}y-\frac{20}{3}=0}$

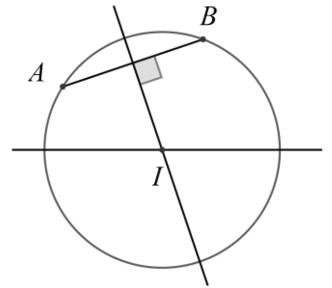
Ví dụ 3. Viết phương trình đường tròn:

a. Đi qua hai điểm $A(3;1), B(-1;3)$ và có tâm nằm trên đường thẳng $3x-y-2=0.$

b. Có tâm nằm trên đường thẳng $d:2x+y-1=0$ và tiếp xúc với cả hai đường thẳng $d_1:3x+4y-1=0$ và $d_2:4x+3y-8=0.$

Lời giải

a. Tâm của đường tròn là giao của đường trung trực của doạn thẳng AB và đường thẳng $3x-y-2=0.$



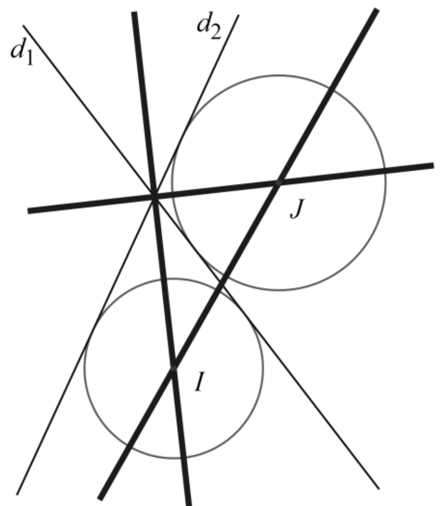
Phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB là :

$$4(x-1)-2(y-2)=0\Leftrightarrow 2x-y=0.$$

Toạ độ tâm I của đường tròn là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases}2x-y=0\\3x-y-2=0\end{cases}\Rightarrow\boxed{I(2;4)}$$

b. Để đường tròn tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2 thì tâm của đường tròn phải nằm trên các tia phân giác của các góc tạo bởi d_1 và d_2. Như vậy tâm của đường tròn là giao điểm của đường thẳng d các đường phân giác của các góc tạo bởi d_1 và d_2.



Phương trình các đường phân giác là :

$x-y-7=0$ và $7x+7y-9=0.$

Trường hợp 1:

Tâm I của đường tròn là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases}2x+y-1=0\\x-y-7=0\end{cases}\Rightarrow I\left(\frac{8}{3};-\frac{13}{3}\right).$$

Bán kính của đường tròn là :

$$d(I,d_1)=\frac{\left|3.\frac{8}{3}+4\left(-\frac{13}{3}\right)-1\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{31}{15}.$$

Suy ra : $\boxed{(C):\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+\left(y+\frac{13}{3}\right)^2=\frac{961}{225}}$

Trường hợp 2 :

Tâm J của đường tròn là nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ 7x+7y-9=0 \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{2}{7};\frac{11}{7}\right)$.

Bán kính của đường tròn là : $d(I,d_1)=\dfrac{\left|3.\left(-\frac{2}{7}\right)+4.\frac{11}{7}-1\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{31}{35}$.

Suy ra : $\boxed{(C):\left(x+\frac{2}{7}\right)^2+\left(y-\frac{11}{7}\right)^2=\frac{961}{1225}}$

Ví dụ 4. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+\frac{4}{5}=0$ và đường thẳng $d: mx-y-2m+3=0, m\in\mathbb{R}$. Với những giá trị nào của tam số m thì đường thẳng d và đường tròn (C) không có điểm chung.

Lời giải

Ta có $(C):(x-1)^2+y^2=\frac{1}{5}$, tâm $I(1;0)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Đường tròn (C) và đường thẳng d không có điểm chung nếu khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng d lớn hơn bán kính. Ta có :

$$d(I,d)>R \Leftrightarrow \frac{|m-0-2m+3|}{\sqrt{m^2+1}}>\frac{\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \frac{m^2-6m+9}{m^2+1}>\frac{1}{5} \Leftrightarrow 4m^2-30m+44>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<2 \\ m>\frac{11}{2} \end{array}\right..$$

Suy ra : $\boxed{m\in(-\infty;2)\cup\left(\frac{11}{2};+\infty\right)}$

Ví dụ 5. Cho hai đường tròn $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ và $x^2+y^2-4x+10y-7=0$. Tìm toạ độ các giao điểm của hai đường tròn trên.

Lời giải

Toạ độ các giao điểm của hai đường tròn là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y+1=0 \\ x^2+y^2-4x+10y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7y-4 \\ 50y^2-74y+25=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{59+7\sqrt{119}}{50} \\ y=\frac{37+\sqrt{119}}{50} \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x=\frac{59-7\sqrt{119}}{50} \\ y=\frac{37-\sqrt{119}}{50} \end{cases}$$

Như vậy toạ độ các giao điểm là : $\boxed{A\left(\frac{59+7\sqrt{119}}{50};\frac{37+\sqrt{119}}{50}\right), B\left(\frac{59-7\sqrt{119}}{50};\frac{37-\sqrt{119}}{50}\right)}$

Ví dụ 6. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC biết phương trình các cạnh của tam giác là $AB: 3x+4y-6=0, BC: y=0, CA: 4x+3y-1=0$.

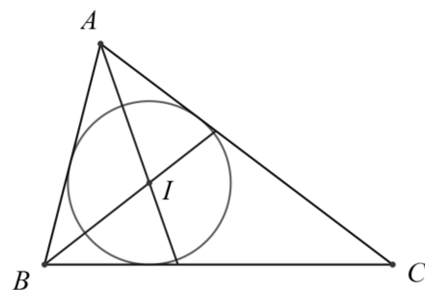
Lời giải

Toạ độ của A là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 3x+4y-6=0 \\ 4x+3y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow A(-2;3).$$

Tương tự ta tính được $B(2;0), C\left(\frac{1}{4};0\right)$.

Phương trình các đường phân giác trong và ngài của góc A là:



$$\frac{3x+4y-6}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm\frac{4x+3y-1}{\sqrt{4^2+3^2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-y+5=0\ (1)\\ x+y-1=0\ (2)\end{array}\right..$$

Thay lần lượt toạ đọ của A, C vào vế trái của (1) ta được :

$$2+5=7>0,\frac{1}{4}+5>0.$$

Suy ra phương trình đường phân giác trong của góc A là :

$$x+y-1=0.$$

Phương trình các đường phân giác của trong và ngoài của góc B là :

$$\frac{3x+4y-6}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm y\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x-y-6=0\ (3)\\ x+3y-2=0\ (4)\end{array}\right..$$

Thay lần lượt toạ độ của A, C vào vế trái của (4) ta được : $-2+3.3-2=5>0,\frac{1}{4}-2=-\frac{7}{4}<0.$

Suy ra phương trình đường phân giác trong của góc B là $x+3y-2=0.$

Toạ độ tâm I của đường tròn là nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases}x+y-1=0\\ x+3y-2=0\end{cases}\Rightarrow I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right).$

Bán kính của đường tròn là : $R=d(I,BC)=\frac{1}{2}.$

Suy ra phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC là : $\boxed{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}}$

III. Bài tập đề nghị.

39. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết $A(1;3),B(5;6),C(7;0).$

40. Biện luận theo *m* vị trí tương đối của đường thẳng $d: x-my+2m+3=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-2y-2=0.$

41. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với trục hoành tại điểm $A(6;0)$ và đi qua điểm $B(9;9).$

42. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm $A(-1;0), B(1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $x-y-1=0.$

43. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-6x+2y+6=0$ và điểm $A(1;3).$ Xét xem *A* nằm trong hay nằm ngoài đường tròn.

44. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-x-7y=0$ và đường thẳng $d: 3x+4y-3=0.$ Viết phương trình các đường tuyến tuyến của (*C*) tại các giao điểm của nó với đường thẳng *d*.

45. Viết phương trình đường tròn:

a. Tiếp xúc với các trục toạ độ và đi qua điểm $A(2;4)$;

b. Đi qua hai điểm $A(4;2), B(5;1)$ và có tâm nằm trên đường thẳng $2x-7=0$;

c. Tiếp xúc với trục hoành, có tâm nằm trên đường thẳng $x+y-3=0$ và bán kính bằng 1;

d. Tiếp xúc với đường thẳng $x-2y+1=0$ tại điểm $A(1;0)$ và đi qua điểm $B(3;-6).$

46. Viết phương trình đường tròn:

a. Đi qua $A(4;2)$ và tiếp xúc với hai đường thẳng $x-3y-2=0, x-3y+18=0$;

b. Có tâm nằm trên đường thẳng $x=5$ và tiếp xúc với hai đường thẳng $3x-y+3=0,$ $x-3y+9=0$;

c. Đi qua các điểm $A(3;4), B(1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $3x+y-3=0.$

47. Cho hai đường tròn $x^2+y^2-7x-7=0$ và $x^2+y^2-x-7y-18=0.$ Tìm toạ độ giao điểm của hai đường tròn.

48. Cho đường tròn (C_1) có tâm $I(2;3),$ bán kính $R_1=3$ và đường tròn (C_2) có tâm $J(m, m-3),$ bán kính $R_2=3.$ Tìm các giá trị của tham số *m* để:

a. Hai đường tròn đã cho tiếp xúc trong với nhau;

b. Hai đường tròn đã cho tiếp xúc ngoài với nhau;

49. *(Khối D năm 2004)* Cho đường tròn $(C): (x-1)^2+(y-2)^2=4$ và đường thẳng $d: x-y-1=0.$ Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng *d*.

50. Viết phương trình đường thẳng qua gốc toạ độ và cắt đường tròn $(x-1)^2+(y-3)^2=25$ tạo ra một dây cung có độ dài bằng 8.

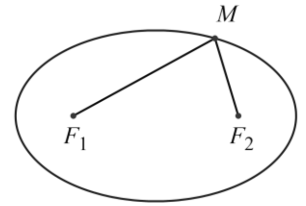
51. *(Khối A năm 2007)* Cho tam giác *ABC* có $A(0;2), B(-2;2), C(4;-2).$ Gọi *H* là chân đường cao kẻ từ *B*. Gọi *M*, *N* lần lượt là trung điểm của *AB*, *AC*. Viết phương trình đường tròn qua *H*, *M*, *N*.

52. Cho ba điểm $A(-1;0), B(2;4), C(4;1).$ Chứng minh rằng tập hợp các điểm *M* thoả mãn $3MA^2+MB^2=2MC^2$ là một đường tròn. Tìm toạ độ tâm và bán kính của đường tròn.

Bài 4. Đường elip

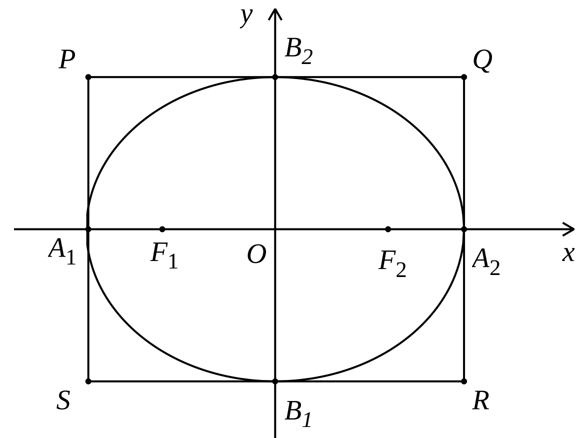
I. Kiến thức cần nhớ.

1. **Định nghĩa đường elip.**
   - Cho hai điểm cố định F_1 và F_2 sao cho $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$ và số $2a$ $(a > c)$. Đường elip (E) là tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$.
   $$(E) = \{M : MF_1 + MF_2 = 2a\}.$$



   - Hai điểm F_1, F_2 là các tiêu điểm của elip.
   - Khoảng cách $2c$ là tiêu cự của elip.
2. **Phương trình chính tắc của elip.**
   - Trong mặt phẳng toạ độ, cho các điểm $F_1(-c;0)$ và $F_2(c;0)$ với $c > 0$ thì phương trình chính tắc của elip nhận F_1, F_2 làm các tiêu đểm là: $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

     Trong đó: $b^2 = a^2 - c^2$.



   - Elip (E) nhận các trục toạ độ làm các trục đối xứng và nhận các gốc toạ độ làm tâm đối xứng.
   - Elip (E) cắt các trục toạ độ tại các điểm $A_1(-a;0), A_2(a;0), B_1(0;-b), B_2(0;b)$ gọi là các đỉnh của elip.
   - Đoạn thẳng $A_1A_2 = 2a$ gọi là trục lớn.
   - Đoạn thẳng $B_1B_2 = 2b$ gọi là trục nhỏ.
   - Các đường thẳng $x = \pm a, y = \pm b$ cắt nhau từng đôi một tại P, Q, R, S tạo thành hình chữ nhật cơ sở của elip (E).
   - Tâm sai của elip là tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn, kí hiệu là e và được xác định như sau: $e = \dfrac{c}{a}$ (do $c < a$ nên $e < 1$).

II. Ví dụ minh hoạ.

Ví dụ 1. Tìm toạ độ các tiêu điểm, các đỉnh, độ dài trục lớn, trục nhỏ của mỗi elip có phương trình sau:

a. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1;$

b. $4x^2+9y^2=16.$

Lời giải

a. Ta có : $a^2=49\Rightarrow a=7;b^2=25\Rightarrow b=5.$

Do $a>b$ nên $c^2=a^2-b^2=49-25=24\Rightarrow c=2\sqrt{6}.$

- Toạ độ các tiêu điểm : $\boxed{F_1\left(-2\sqrt{6};0\right),F_2\left(2\sqrt{6};0\right)}$
- Toạ độ các đỉnh : $\boxed{A_1(-7;0),A_2(7;0),B_1(0;-5),B_2(0;5)}$
- Độ dài trục lớn : $\boxed{2a=14}$
- Độ dài trục nhỏ : $\boxed{2b=10}$

b. Ta có : $4x^2+9y^2=16\Leftrightarrow\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{16}{9}}=1.$

Suy ra : $a^2=4\Rightarrow a=2;b^2=\frac{16}{9}\Rightarrow b=\frac{4}{3}.$

Do $a>b$ nên $c^2=a^2-b^2=4-\frac{16}{9}=\frac{20}{9}\Rightarrow c=\frac{2\sqrt{5}}{3}.$

- Toạ độ các tiêu điểm : $\boxed{F_1\left(-\frac{2\sqrt{5}}{3};0\right),F_2\left(\frac{2\sqrt{5}}{3};0\right)}$
- Toạ độ các đỉnh : $\boxed{A_1(-2;0),A_2(2;0),B_1\left(0;-\frac{4}{3}\right),B_2\left(0;\frac{4}{3}\right)}$
- Độ dài trục lớn : $\boxed{2a=4}$
- Độ dài trục bé : $\boxed{2b=\frac{8}{3}}$

Ví dụ 2. Viết phương trình chính tắc của elip trong mỗi trường hợp sau:

a. Tâm O, một tiêu điểm là $(3;0)$, một đỉnh là $(-5;0)$;

b. Có tiêu cự bằng 8, tỉ số $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}.$

Lời giải

a. Ta có : $a=|-5|=5,c=3\Rightarrow b^2=a^2-c^2=25-9=16\Rightarrow b=4.$

Suy ra phương trình chính tắc của elip là : $\boxed{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1}$

b. Tiêu cự $2c=8\Rightarrow c=4.$

Tỉ số : $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=2c=8.$

Suy ra : $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{64-16}=4\sqrt{3}.$

Suy ra phương trình chính tắc của elip là : $\boxed{\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1}$

Ví dụ 3. Lập phương trình chính tắc của elip trong các trường hợp sau:

a. Elip đi qua các điểm $M(0;1)$ và $N\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

b. Elip có một tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$ và điểm $M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và nằm trên elip.

Lời giải

a. Phương trình chính tắc của elip có dạng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Do elip đi qua các điểm *M* và *N* nên ta có : $\begin{cases}\frac{1}{b^2}=1\\ \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b^2=1\\ a^2=4.\end{cases}$

Suy ra phương trình chính tắc của elip là : $\boxed{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1}$

b. Phương trình chính tắc của elip có dạng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Vì elip có một tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$ nên $c=\sqrt{3}\Rightarrow a^2=b^2+3\,(1)$.

Lại có $M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\in(E)\Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1$ (2).

Thay (1) vào (2) ta được: $\frac{1}{b^2+3}+\frac{3}{4b^2}=1\Leftrightarrow 4b^4+5b^2-9=0\Leftrightarrow b^2=1\Rightarrow a^2=4$.

Suy ra phương trình chính tắc của elip là: $\boxed{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1}$

Ví dụ 4. Cho điểm $M(x;y)$ di động có toạ độ thoả mãn $\begin{cases}x=7\cos t\\ y=4\sin t\end{cases}$ với *t* là tham số thay đổi. Chứng minh rằng *M* di động trên một elip.

Lời giải

Ta có : $\begin{cases}x=7\cos t\\ y=4\sin t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{7}=\cos t\\ \frac{y}{4}=\sin t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x^2}{49}=\cos^2 t\\ \frac{y^2}{16}=\sin^2 t\end{cases}\Rightarrow\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1.$

Như vậy điểm *M* di động trên elip có phương trình là : $\boxed{\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1}$

Ví dụ 5. Cho elip $4x^2+9y^2=36$ và điểm $M(1;1)$ viết phương trình đường thẳng *d* đi qua *M* và cắt elip đã cho tại hai điểm *A* và *B* sao cho *M* là trung điểm của *AB*.

Lời giải

Xét đường thẳng *d* đi qua điểm $M(1;1)$ và có hệ số góc *k*.

Phương trình đường thẳng d là : $y = k(x-1)+1$.

Hoành độ của hai điểm A và B là nghiệm của phương trình :

$$4x^2 + 9\left[k(x-1)+1\right]^2 = 36 \Leftrightarrow (9k^2+4)x^2 + 18k(1-k)x + 9(1-k^2) - 36 = 0\,(1).$$

$MA = MB$ khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm x_A, x_B sao cho :

$$\frac{x_A + x_B}{2} = x_M \Leftrightarrow \frac{-18k(1-k)}{2(9k^2+4)} = 1 \Leftrightarrow 18k^2 - 18k = 18k^2 + 8 \Leftrightarrow k = -\frac{4}{9}.$$

Suy ra phương trình của đường thẳng d là : $y = -\frac{4}{9}(x-1)+ \Leftrightarrow \boxed{4x+9y-13=0}$

III. Bài tập đề nghị.

53. Lập phương trình chính tắc của elip biết rằng:

a. $A(0;-2)$ là một đỉnh và $F(1;0)$ là một tiêu điểm của elip;

b. $F_1(-7;0)$ là một tiêu điểm của elip và elip đi qua $M(-2;12)$;

c. Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là $x=\pm 4, y=\pm 3$;

d. Elip đi qua hai điểm $M\left(4;\sqrt{3}\right), N\left(2\sqrt{2};-3\right)$.

54. Tìm những điểm trên elip $(E): \frac{x^2}{9}+y^2=1$

a. Điểm đó nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông;

b. Điểm đó nhìn hai tiêu điểm một góc 60°.

55. Cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Xác định m để đường thẳng $d: x+m$ và (E) có điểm chung.

56. Cho điểm $M(x;y)$ di động luôn có toạ độ thoả mãn $\begin{cases} x=7\cos t \\ y=5\sin t \end{cases}$ với t là tham số. Chứng minh rằng *M* di động trên một elip.

57. Cho elip $(E): 9x^2+25y^2=225$.

a. Tìm toạ độ các tiêu điểm của elip;

b. Tìm điểm *M* nằm trên elip sao cho *M* nhìn hai hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

58. Cho elip $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b<a)$. Tính tỉ số $\frac{c}{a}$ trong các trường hợp sau:

a. Trục lớn bằng ba lần trục nhỏ;

b. Đỉnh trên trục nhỏ nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông;

c. Khoảng cách giữa đỉnh trên trục nhỏ và đỉnh trên trục lớn bằng tiêu cự.

59. Cho elip $(E): x^2+4y^2=16$.

a. Viết phương trình đường thẳng *d* đi qua điểm $M\left(1;\frac{1}{2}\right)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;2)$;

b. Tìm toạ độ các giao điểm *A* và *B* của đường thẳng *d* và elip (E). Chứng minh $MA=MB$.

Bài tập trắc nghiệm không đáp án

1. Cho tam giác *ABC* có toạ độ các đỉnh là $A(1;2), B(3;1), C(5;4)$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường cao của tam giác vẽ từ *A*.

A. $2x+3y-8=0;$ **B.** $3x-2y-5=0;$ **C.** $5x-6y+7=0;$ **D.** $3x-2y+5=0.$

2. Cho tam giác *ABC* với các đỉnh $A(-1;1), B(4;7), C(3;-2), M$ là trung điểm của đoạn thẳng *AB*. Viết phương trình tham số đường thẳng *CM*.

A. $\begin{cases} x=3-t \\ y=-2+4t; \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2-4t; \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=3-t \\ y=4+2t; \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=3+3t \\ y=-2+4t. \end{cases}$

3. Cho phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} 5+t \\ -9-2t. \end{cases}$

Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình tổng quát của *d*?

A. $2x+y-1=0;$ **B.** $2x+3y+1=0;$ **C.** $x+2y+2=0;$ **D.** $x+2y-2=0.$

4. Đường thẳng đi qua điểm $M(1;0)$ và song song với đường thẳng $d: 4x+2y+1=0$ có phương trình tổng quát là:

A. $4x+2y+3=0;$ **B.** $2x+y+4=0;$ **C.** $2x+y-2=0;$ **D.** $x-2y+3=0.$

5. Cho đường thẳng *d* có phương trình tổng quát $3x+5y+2006=0$. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. *d* có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;5);$

B. *d* có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(5;-3);$

C. *d* có hệ số góc $k=\frac{5}{3};$

D. *d* song song với đường thẳng $3x+5y=0.$

6. Bán kính của đường tròn tâm $I(0;-2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: 3x-4y-23=0$ là:

A. $15;$ **B.** $5;$ **C.** $\frac{3}{5};$ **D.** $3.$

7. Cho hai đường thẳng $d_1: 2x+y+4-m=0, d_2: (m+3)x+y-2m-1=0$. Tìm *m* để hai đường thẳng đã cho song óng với nhau.

A. $m=1;$ **B.** $M=-1;$ **C.** $M=2;$ **D.** $m=3.$

8. Cho hai đường thẳng $d_1: x+2y+4=0, d_2: 2x-y+6=0$. Tìm số đo góc giữa hai đường thẳng đã cho.

A. $30^\circ;$ **B.** $60^\circ;$ **D.** $45^\circ;$ **D.** $90^\circ.$

9. Cho hai đường thẳng $d_1: x+y+5=0, d_2: y=-10$. Tìm số đo góc giữa hai đường thẳng đã cho.

A. $45^\circ;$ **B.** $30^\circ;$ **C.** $88^\circ57'52'';$ **D.** $1^\circ13'8''.$

10. Khoảng cách từ điểm $M(0;3)$ đến đường thẳng $d: x\cos\alpha + y\sin\alpha + 3(2-\sin\alpha)=0$ là:

A. $\sqrt{6};$ **B.** $6;$ **C.** $3\sin\alpha;$ **D.** $\frac{3}{\sin\alpha+\cos\alpha}.$

11. Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn?

A. $x^2+2y^2-4x-8y+1=0;$ **B.** $4x^2+y^2-10x-6y-2=0;$

C. $x^2+y^2-2x-8y+20=0;$ **D.** $x^2+y^2-4x+6y-12=0.$

12. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x+4y-20=0$. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. (C) có tâm đi qua $I(1;2);$ **B.** (C) có bán kính $R=5;$

C. (C) đi qua $M(2;2);$ **D.** (C) không đi qua $A(1;1).$

13. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(3;4)$ với đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y-3=0$ là:

A. $x+y-7=0;$ **B.** $x+y+7=0;$ **C.** $x-y-7=0;$ **D.** $x+y-3=0.$

14. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ và đường thẳng $\Delta: x + 2y + 1 = 0$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Δ đi qua tâm O của (C); **B.** Δ cắt (C) tại hai điểm;

C. Δ tiếp xúc với (C); **D.** Δ không có điểm chung với (C).

15. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$. Tìm tâm I và bán kính R của đường tròn đã cho.

A. $I(-1;1), R = 1$; **B.** $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), R = \frac{\sqrt{6}}{2}$;

C. $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), R = \frac{\sqrt{6}}{2}$; **D.** $I(1;-1), R = \sqrt{6}$.

16. Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2(m+2)x + 4my + 19m - 6 = 0$, hãy tìm m để phương trình đã cho là phương trình đường tròn.

A. $1 < m < 2$; **B.** $-2 \le m \le 1$; **C.** $\left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 2; \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 1. \end{array}\right.$

17. Đường thẳng $d: 4x + 3y + m = 0$ tiếp xúc với đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$ khi:

A. $m = 3$; **B.** $m = 5$; **C.** $m = 1$; **D.** $m = 0$.

18. Cho hai điểm $A(1;1), B(7;5)$. Viết phương trình đường tròn đường kính AB.

A. $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 12 = 0$; **B.** $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0$;

C. $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 12 = 0$; **D.** $x^2 + y^2 + 8x + 6y - 12 = 0$.

19. Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm $A(0;2), B(-2;0), C(2;0)$.

A. $x^2 + y^2 = 8$; **B.** $x^2 + y^2 + 2x + 4 = 0$;

C. $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$; **D.** $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

20. Cho điểm $M(0;4)$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$. Tìm phát biểu đúng trong các phát biểu sau:

A. M nằm ngoài (C); **B.** M nằm trên (C);

C. M nằm trong (C); **D.** M trùng với tâm của (C).

21. Cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ và các mệnh đề:

(I) (E) có các tiêu điểm $F_1(-4;0), F_2(4;0)$;

(II) (E) có tỉ số $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$;

(III) (E) có đỉnh $A_1(-5;0)$;

(IV) (E) có độ dài trục nhỏ bằng 3.

Các mệnh đề sai là:

A. (I) và (II); **B.** (II) và (III); **C.** (I) và (III); **D.** (IV) và (I).

22. Phương trình chính tắc của elip có hai đỉnh $(-3;0), (3;0)$ và hai tiêu điểm $(-1;0), (1;0)$ là:

A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$; **B.** $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{9} = 1$; **C.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$; **D.** $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$.

23. Cho $(E): x^2 + 4y^2 = 1$, hãy tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

(I) (E) có trục lớn bằng 1;

(II) (E) có trục nhỏ bằng 4;

(III) (E) có tiêu điểm $F_1\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

(IV) (E) có tiêu cự bằng $\sqrt{3}$.

A. (I); **B.** (II) và (IV); **C.** (I) và (III); **D.** (IV).

24. Dây cung của elip $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (0<b<a)$ vuông góc với trục lớn tại tiêu điểm có độ dài là:

A. $\frac{2c^2}{a}$; **B.** $\frac{2b^2}{a}$; **C.** $\frac{2a^2}{c}$; **D.** $\frac{a^2}{c}$.

25. Một elip có trục lớ bằng 26, tỉ số $\frac{c}{a}=\frac{12}{13}$. Tính trục nhỏ của elip.

A. 5; **B.** 10; **C.** 12; **D.** 24.

26. Cho elip $(E): 4x^2+9y^2=36$. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. (E) có trục lớn bằng 6; **B.** (E) có trục nhỏ bằng 4;

C. (E) có tiêu cự bằng $\sqrt{5}$; **D.** (E) có tỉ số $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

27. Khi cho *t* thay đổi, điểm $M(5\cos t; 4\sin t)$ di động trên đường nào sau đây?

A. Elip; **B.** Đường thẳng; **C.** Đường tròn; **D.** Nửa đường tròn.

28. Cho elip $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (0<b<a)$. Gọi F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip. Cho $M(0;-b)$. Tính giá trị của biểu thức $MF_1.MF_2-OM^2$.

A. c^2; **B.** $2a^2$; **C.** $2b^2$; **D.** a^2-b^2.

29. Cho elip $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ và đường thẳng $d: y+3=0$. Tích các khoảng cách từ hai tiêu điểm của elip đến đường thẳng *d* bằng bao nhiêu.

A. 16; **B.** 9; **C.** 81; **D.** 7.

30. Cho $\vec{e}=(4;1), \vec{f}=(1;4)$. Tìm *n* để hai vectơ $\vec{a}=n\vec{e}+\vec{f}$ và $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$ tạo với nhau một góc bằng 45^o.

A. $n=1$; **B.** $n=-4$; **C.** $n=5$; **D.** Tất cả các câu trên đều sai.

31. Cho ba điểm $M(-1;-2), N(3;2), P(4;-1)$. Tìm điểm *E* trên *Ox* sao cho $\left|\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{EP}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. Không tồn tại *E*; **B.** $E(3;7)$; **C.** $E(2;0)$; **D.** $E(1;0)$.

32. Cho tam giác *ABC* với $A(-4;1), B(2;4), C(2;-2)$. Tìm toạ độ trực tâm của tam giác *ABC*.

A. $\left(\frac{1}{2};1\right)$; **B.** $(10;11)$; **C.** $(2;5)$; **D.** $(3;1)$.

33. Cho $A(-1;3), B(1;1), C(2;4)$. Xác định toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

A. $\left(\frac{2}{3};\frac{8}{3}\right)$; **B.** $\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$; **C.** $\left(-\frac{2}{5};-\frac{5}{2}\right)$; **D.** $(6;4)$.

34. Cho $A(-4;1), B(2;4), C(2;-2)$. Tìm toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

A. $\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$; **B.** $\left(-\frac{1}{4};1\right)$; **C.** $\left(\frac{1}{2};2\right)$; **D.** $\left(-\frac{1}{4};4\right)$.

35. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(-2;-4)$ và cắt trục *Ox* tại *A*, cắt trục *Oy* tại *B* sao cho tam giác *OAB* vuông cân.

A. $x+y-6=0$; **B.** $x+y+6=0$; **C.** $x+y-2=0$; **D.** $x-y-2=0$.

36. Cho $A(4;5), B(-6;-1), C(1;1)$. Phương trình một trong ba đường trung tuyến của tam giác *ABC* là:

A. $8x-17y+32=0$; **B.** $4x+2y-3=0$;

C. $10x-13y+25=0;$ **D.** $3x+2y-3=0.$

37. Cho tam giác *ABC* có $AB:2x-3y-1=0, BC:x+3y+7=0, CA:5x-2y+1=0.$ Viết phương trình đường cao của tam giác kẻ từ đỉnh *B*.

A. $2x-5y+8=0;$ **B.** $x+3y+\frac{1}{3}=0;$ **C.** $2x+5y+\frac{37}{30};$ **D.** $2x+5y+6=0.$

38. Hãy xác định toạ độ điểm *P* trên đường thẳng *d* có phương trình $x-y+2=0$ sao cho *P* cách đều hai điểm $A(0;4)$ và $B(4;-9).$

A. Không tồn tại điểm *P*; **B.** $P(5;-7);$

C. $P\left(\frac{133}{18};\frac{169}{18}\right);$ **D.** $P\left(\frac{29}{18};\frac{69}{18}\right).$

39. Cho điểm $A(0;1)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+2t\\ y=3+t\end{cases}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Không tồn tại điểm *M* trên *d* sao cho $AM=5;$

B. Tồn tại duy nhất một điểm *M* trên *d* sao cho $AM=5;$

C. Tồn tại hai điểm *M* trên *d* sao cho $AM=5,$ đó là $(4;4)$ và $\left(-\frac{24}{5};-\frac{2}{5}\right);$

D. Tất cả các câu trên đều sai.

40. Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;-2)$ xuống đường thẳng $d:5x-12y+10=0$ là:

A. $\left(\frac{262}{169};\frac{250}{169}\right);$ **B.** $\left(\frac{262}{169};0\right);$ **C.** $\left(\frac{262}{169};\frac{250}{169}\right);$ **D.** Đáp án khác.

41. Cho ba điểm $A(3;0), B(-5;4), P(10;2).$ Viết phương trình đường thẳng đi qua *P* và cách đều *A*, *B*.

A. $2x+3y-26=0 \vee 3x+2y-34=0;$ **B.** $2x+3y-14=0 \vee y-2=0;$

C. $3x+y-36=0 \vee x-10=0;$ **D.** $x+2y-14=0 \vee y-2=0.$

42. Cho hai đường thẳng $d_1: x+2y-3=0$ và $d_2: 3x-y+2=0.$ Viết phương trình đường thẳng *d* đi qua điểm $P(3;1)$ và cắt d_1, d_2 lần lượt ở *A*, *B* sao cho đường thẳng *d* tạo với d_1 và d_2 một tam giác cân có đáy là *AB*.

A. Không tồn tại đường thẳng *d*; **B.** $d: x-y-2=0;$

C. $d: x+5y-8=0;$ **D.** Đáp án khác.

43. Cho ba điểm $A(4;-1), B(-3;2), C(1;6).$ Tính góc giữa hai đường thẳng *AB*, *AC*.

A. $(AB, AC)\approx 32^{\circ};$ **B.** $(AB, AC)\approx 40^{\circ};$

C. $(AB, AC)\approx 43^{\circ}36';$ **D.** $(AB, AC)\approx 18^{\circ}.$

44. Cho ba điểm $A(3;-7), B(9;-5), C(-5;9).$ Viết phương trình đường phân giác trong góc *A* của tam giác *ABC*.

A. $3x+y-2=0;$ **B.** $2x-y-13=0;$

C. $4x+2y+1=0;$ **D.** $\left(1+2\sqrt{2}\right)x-\left(3-\sqrt{2}\right)y+\sqrt{2}-24=0.$

45. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(0;1)$ và tạo với đường thẳng $x+2y+3=0$ một góc bằng $45^{\circ}.$

A. $5x-3y+3=0 \vee 5x+y-1=0;$ **B.** $x-3y+3=0 \vee 3x+y-1=0;$

C. $2x-5y+5=0 \vee 2x+y-1=0;$ **D.** $x+3y+3=0 \vee 3x-y+1=0.$

46. Đường thẳng qua $M(1;1)$ và cắt elip $(E): 4x^2+9y^2=36$ tại hai điểm M_1, M_2 sao cho $MM_1=MM_2$ có phương trình là:

A. $2x+4y-5=0;$ **B.** $16x-15y+100=0;$

C. $4x+9y-13=0$; **D.** $x+y+5=0$.

47. Cho điểm $M(2;3)$. Viết phương trình đường thẳng cắt hai trục toạ độ ở *A*, *B* sao cho tam giác *ABM* vuông cân tại *M*.

A. $x-3=0$; **B.** $2x+3y-13=0$; **C.** $2x+3y+13=0$; **D.** Đáp án khác.

48. Cho ba điểm $A(2;-4), B\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right), C(6;0)$. Phát biểu nào đúng về đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*.

A. Tâm $I(3;-1)$, bán kính $R=\sqrt{3}$; **B.** Tâm $I(2;1)$, bán kính $R=\sqrt{3}$;

C. Tâm $I(3;-1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$; **D.** Tâm $I(0;1)$, bán kính $R=\sqrt{3}$.

49. Cho tam giác *ABC* có $A(-1;2), B(2;0), C(-3;1)$. Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

A. $\left(-\frac{12}{5};-\frac{13}{14}\right)$; **B.** $\left(-\frac{11}{4};-\frac{13}{14}\right)$; **C.** $\left(-\frac{11}{4};-\frac{14}{15}\right)$; **D.** $\left(-\frac{11}{6};-\frac{13}{15}\right)$.

50. Cho elip có phương trình $16x^2+25y^2=100$. Tính tổng khoảng cách từ điểm thuộc elip có hoành độ bằng 2 đến các tiêu điểm.

A. $\sqrt{3}$; **B.** 5; **C.** $2\sqrt{2}$; **D.** $4\sqrt{3}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng

1. **a.** Gọi M là trung điểm của AB thì $M=\left(\frac{2-1}{2};\frac{3+4}{2}\right)=\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$.

Suy ra: $\overrightarrow{CM}=\left(\frac{1}{2}-3;\frac{7}{2}-6\right)=\left(-\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)\Rightarrow \overrightarrow{n_{CM}}=(1;-1)$.

Phương trình đường thẳng CM là: $1(x-3)-1(y-6)=0\Leftrightarrow \boxed{x-y+3=0}$

b. Ta có $\overrightarrow{BC}=(4;2)\Rightarrow \overrightarrow{n_{BC}}=(1;-2)\Rightarrow BC:1(x-3)-2(y-6)=0\Leftrightarrow x-2y+9=0$.

Phương trình đường thẳng AH là: $4(x-2)+2(y-3)=0\Leftrightarrow 2x+y-7=0$.

Toạ độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}x-2y+9=0\\2x+y-7=0\end{cases}\Rightarrow \boxed{A\left(-\frac{23}{5};\frac{11}{5}\right)}$

2. Dễ thấy hệ số góc $k=\pm\frac{1}{2}$.

Trường hợp 1 : với $k=-\frac{1}{2}$ ta có phương trình đường thẳng cần tìm là:

$$y=-\frac{1}{2}(x-1)+2\Leftrightarrow \boxed{x+2y-5=0}$$

Trường hợp 2 : với $k=\frac{1}{2}$ ta có phương trình đường thẳng cần tìm là:

$$y=\frac{1}{2}(x-1)+2\Leftrightarrow \boxed{x-2y+3=0}$$

3. **Hướng dẫn :** Chú ý rằng $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3};y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$. Sau khi tìm được toạ độ điểm C bạn đọc dễ dàng tìm được phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác.

4. Dễ thấy đường trung trực đi qua điểm M sẽ vuông góc với đường thẳng NP.

Ta có: $\overrightarrow{NP}=(2-4;4-1)=(-2;3)$.

Phương trình đường trung trực của tam giác đi qua M là:

$$-2(x+1)+3(y+0)=0\Leftrightarrow \boxed{2x-3y+2=0}$$

Hai đường còn lại xin để lại cho bạn đọc.

5. Đường thẳng cần tìm có phương trình là : $x+y-3=0\vee 2x-y=0$.

6. Ta có : $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3};y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\Rightarrow G(1;2)$.

Hệ số góc $k=\pm\frac{1}{4}$.

Trường hợp 1 : với $k=-\frac{1}{4}$ ta có phương trình đường thẳng cần tìm là:

$$y=-\frac{1}{4}(x-1)+2\Leftrightarrow \boxed{x+4y-9=0}$$

Trường hợp 2 : với $k=\frac{1}{4}$ ta có phương trình đường thẳng cần tìm là:

$$y=\frac{1}{4}(x-1)+2\Leftrightarrow \boxed{x-4y+7=0}$$

7. Ta có: $ABO=60^{\text{o}}\Rightarrow BAO=120^{\text{o}}$.

Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng d và trục Ox, ta xét các trường hợp sau đây:

Trường hợp 1 : $\alpha=BAO=120^{\text{o}}\Rightarrow k=\tan 120^{\text{o}}=-\sqrt{3}$.

Phương trình đường thẳng *d* là: $y=-\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\Leftrightarrow \boxed{6\sqrt{3}x+6y-2+3\sqrt{3}=0}$

Trường hợp 2 : $\alpha+BAO=120^{o}\Rightarrow\alpha=60^{o}\Rightarrow k=\tan 60^{o}=\sqrt{3}.$

Phương trình đường thẳng *d* là: $y=\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\Leftrightarrow \boxed{6\sqrt{3}x-6y+2-3\sqrt{3}=0}$

8. Do $A\in d$ nên $A(x_A;2x_A-4)$. Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_d}=0\Leftrightarrow(1-x_A;6-2x_A).(1;2)=0$

$$\Leftrightarrow 1-x_A+12-4x_A=0\Leftrightarrow x_A=\frac{13}{5}\Rightarrow A=\left(\frac{13}{5};\frac{46}{5}\right).$$

Phần còn lại tác giả xin để cho bạn đọc.

9. Bạn đọc tự giải.

10. Bạn đọc tự giải.

11. HD: Điểm *C* là giao điểm của trung tuyến *CM* và đường thẳng *AC*. Điểm *M* là giao điểm của *AB* và *CM*, sau khi tìm được toạ độ điểm *M* thì tìm được toạ độ điểm *C* từ đó viết được phương trình đường thẳng *BC*.

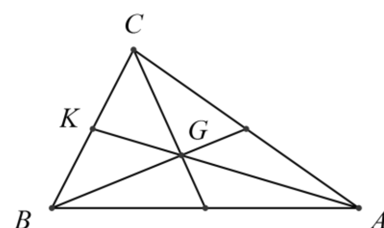
12. HD: Ta tìm được toạ độ của hai đỉnh đầu tiên là giao điểm của hai đường trung tuyến với cạnh đã cho. Tìm toạ độ trọng tâm của tam giác rồi suy ra toạ độ đỉnh còn lại.

13. Bạn đọc tự giải.

14. Bạn đọc tự giải.

15. Bạn đọc tự giải.

16. Toạ độ điểm *G* là nghiệm của hệ phương trình:



$$\begin{cases}2x-y+1=0\\x+y-4=0\end{cases}\Rightarrow G\left(-\frac{5}{3};-\frac{7}{3}\right).$$

Ta có: $\overrightarrow{AK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}\Leftrightarrow(x_K+2;y_K-3)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)\Rightarrow K\left(-\frac{3}{2};4\right).$

Gọi $B(x_B;2x_B+1)$ suy ra $C(-3-x_B;7-2x_B)$ vì *K* là trung điểm của *BC*.

Vì *C* nằm trên đường thẳng $x+y-4=0$ nên ta có: $(-3-x_B)+(7-2x_B)-4=0\Leftrightarrow x_B=0.$

Phần giải tiếp xin để cho bạn đọc.

17. Bạn đọc tự giải.

18. Giả sử $M(m;0),N(0;n)$ với $m,n>0$. Phương trình đường thẳng *d* là: $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1.$

Vì đường thẳng *d* đi qua điểm *Q* nên $\frac{2}{m}+\frac{3}{n}=1\Rightarrow n=\frac{3m}{m-2}$. Do $n>0$ nên $m>2.$

Ta có: $OM+ON=m+n=m+\frac{3m}{m-2}=(m-2)+\frac{6}{m-2}+5\geq 2\sqrt{6}+5.$

Đẳng thức xảy ra khi : $\begin{cases}m-2=\dfrac{6}{m-2}\\n=\dfrac{3m}{m-2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2+\sqrt{6}\\n=3+\sqrt{6}\end{cases}.$

Phương trình đường thẳng $\boxed{d:\frac{x}{2+\sqrt{6}}+\frac{y}{3+\sqrt{6}}=1}$

19. Bạn đọc tự giải.

20. Gọi $A(a;0),B(0;b)$ với $a,b>0$. Phương trình đường thẳng *d* là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$

Do đường thẳng d đi qua điểm M nên ta có: $\frac{3}{a}+\frac{1}{b}=1$.

Cách 1: Sử dụng bất đẳng thức *AM-GM*.

Ta có: $OA+3OB=a+3b\ge 2\sqrt{a.3b}\Leftrightarrow OA+3OB\ge 2\sqrt{3ab}$.

Mà ta cũng có: $\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\ge 2\sqrt{\frac{3}{a}.\frac{1}{b}}\Rightarrow 1\ge\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{ab}}\Leftrightarrow ab\ge 12$.

Suy ra: $OA+3OB\ge 2\sqrt{3.12}\Leftrightarrow OA+3OB\ge 12$.

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} a=3b \\ \frac{3}{a}=\frac{1}{b} \\ \frac{3}{a}+\frac{1}{b}=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=6 \\ b=2 \end{cases}\Rightarrow d:\frac{x}{6}+\frac{y}{2}=1\Leftrightarrow \boxed{d: x+3y-6=0}$

Cách 2: *Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwars.*

Ta có: $OA+3OB=a+3b=(a+3b)\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge\left(\sqrt{a}.\sqrt{\frac{3}{a}}+\sqrt{3b}\sqrt{\frac{1}{b}}\right)^2\Rightarrow OA+3OB\ge 12$.

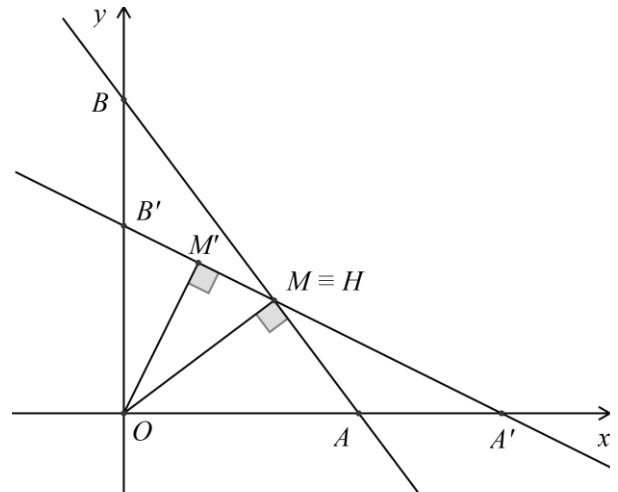
Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} a:\frac{3}{a}=3b:\frac{1}{b} \\ \frac{3}{a}+\frac{1}{b}=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=6 \\ b=2 \end{cases}\Rightarrow \boxed{d: x+3y-6=0}$

21. Xét tam giác OAB vuông tại O ta có: $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{OH^2}$ với H là chân đường cao hạ từ O xuống cạnh AB của tam giác OAB.

Để $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất thì $\frac{1}{OH^2}$ nhỏ nhất, tức là OH lớn nhất. Mà OH lớn nhất khi H và M trùng nhau.

Như vậy đường thẳng d sẽ nhận $\overrightarrow{OM}=(4;3)$ làm vectơ pháp tuyến.

Suy ra phương trình đường thẳng cần tìm là $\boxed{d: 4x+3y-25=0}$



22. Bạn đọc tự giải.

23. Bạn đọc tự giải.

24. HD: Vì M nằm trên d_3 nên $M(2y_M; y_M)$ từ đó ta tính khoảng cách từ M tới d_1 bằng 2 lần khoảng cách từ M đến d_2.

ĐS: $M_1(-22;-11), M_2(2;1)$.

25. ĐS: $x-3y+11=0\vee x+y-1=0$.

26. Bạn đọc tự giải.

27. Bạn đọc tự giải.

28. Bạn đọc tự giải.

29. Bạn đọc tự giải.

30. Bạn đọc tự giải.

31. HD: $AB: 2x + y - 2 = 0 \Rightarrow B\left(\frac{2}{5}; \frac{6}{5}\right)$.

Vì $C \in d$ nên $C(2y_C - 2; y_C); AB = 2BC \Rightarrow AB^2 = 4BC^2 \Rightarrow C_1\left(\frac{4}{7}; \frac{7}{5}\right), C_2(0;1)$.

32. $C\ (7;3), C_2\left(-\frac{43}{11}; -\frac{27}{11}\right)$.

33. Bạn đọc tự giải.

34. Bạn đọc tự giải.

35. HD: Cách 1 viết phương trình các cạnh của tam giác sau đó tì mối quan hệ của chúng với đường thẳng *d* rồi đưa ra kết luận. Cách 2 quan hệ bằng cách thay toạ độ của ba điểm *A*, *B*, *C* vào đường thẳng *d*.

36. HD: Cách 1 dùng công hức Herron. Cách 2 $S_{OBC} = \frac{1}{2} d(0, BC).BC$.

37. HD: Điểm đối xứng của *A* qua đường phân giác trong góc *B* nằm trên *BC*, điểm đối xứng của *A* qua đường phân giác trong của góc *C* nằm trên *BC*.

38. HD: Tính góc giữa một đường phân giác và một cạnh để xác định xem trong hai đường phân giác đường nào là đường cần tìm.

39. Bạn đọc tự giải.

40. Bạn đọc tự giải.

41. HD: Cách 1 gọi *I* là tâm của đường tròn thì $\begin{cases} IA \perp Ox \\ IA = IB \end{cases}$. Cách 2 gọi *I* là tâm đường tròn và *M* là trung điểm *AB* thì $\begin{cases} IA \perp Ox \\ IM \perp AB \end{cases}$. Cách 3 gọi *I* là tâm đường tròn thì *I* nằm trên đường trung trực của *AB* và nằm trên đường thẳng đi qua *A* và vuông góc với *Ox*.

42. Gọi *I* là trung điểm của đường tròn thì $IA = IB = d(I, d: x - y - 1 = 0)$.

43. Bạn đọc tự giải.

44. Bạn đọc tự giải.

45. a. Gọi $I(a;b)$ ta có:

$$d(I, Ox) = d(I, Oy) = IA \Leftrightarrow |b| = |a| = \sqrt{(2-a)^2 + (4-b)^2} \Rightarrow a^2 = (2-a)^2 + (4-a)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 12a + 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 10 \Rightarrow I(10;10) \Rightarrow (C): (x-10)^2 + (y-10)^2 = 10 \\ a = 2 \Rightarrow I(2;2) \Rightarrow (C): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 10 \end{array}\right.$$

46. Bạn đọc tự giải.

47. Bạn đọc tự giải.

48. a. Hai đường tròn này tiếp xúc trong với nhau khi $IJ = |R_1 - R_2|$.

b. Hai đường tròn này tiếp xúc ngoài với nhau khi $IJ = R_1 + R_2$.